



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап



Задачи для 11 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 2024x + 1023131} + \sqrt{3x^2 - 2025x + 1023132} + \sqrt{4x^2 - 2026x + 1023133} = \\ = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 3x + 3}. \end{aligned}$$

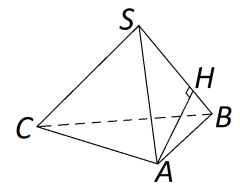
(Л. С. Корешкова)

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2 \times 2 \times 2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?
3. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). В начале игры у Паши была однозначная сумма денег, а у Игоря — четырёхзначная, а в конце у Игоря стала двузначная, а у Паши — трёхзначная. Какое минимальное количество игр мог выиграть Паша? Игроки не могут уходить в минус.

(Л. С. Корешкова)

(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

4. На плоскости в ортогональной проекции изображена правильная пирамида $SABC$ (с основанием ABC) и высота AH грани SAB , как показано на рисунке. Как с помощью циркуля и линейки построить изображение центра сферы, описанной возле пирамиды?



(А. А. Теслер)

5. Решите в натуральных числах уравнение $a^b + a + b = b^a$. (О. А. Пяйве, Е. Ю. Воронецкий)
6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий)