



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап



Задачи для 9 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл? (Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)
2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.
Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать? (Е. С. Голикова)
3. Решите уравнение: $[20x + 23] = 20 + 23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a . (Л. С. Корешкова)
4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A . На катете AC отмечена точка D такая, что $AD : DC = 1 : 3$, после чего построены окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами A и C соответственно, проходящие через точку D . Γ_2 пересекает гипотенузу в точке E . Окружность Γ_3 с центром B и радиусом BE пересекает Γ_1 внутри треугольника в такой точке F , что угол AFB прямой. Найдите BC , если $AB = 5$. (П. Д. Муленко)
5. Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел? (М. В. Карлукова)
6. На координатной плоскости отметили точки $A(0, 0)$ и $B(1000, 0)$, а также точки $C_1(1, 1)$, $C_2(2, 1)$, \dots , $C_{999}(999, 1)$. Потом провели всевозможные прямые AC_i и BC_i ($1 \leq i \leq 999$). Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.) (О. А. Пяйве)