Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

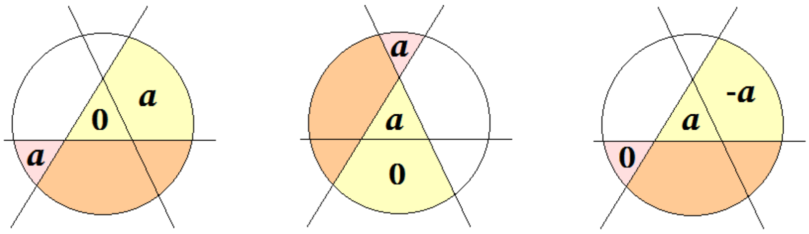
Задачи для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.

   Решение. Разберём три случая расположения нуля (по картинке на каждый случай). На картинках сумма жёлтых секторов равна сумме розовых (поскольку жёлтые + оранжевые = розовые + оранжевые = полусумма всех чисел). Видим, что первые два случая вообще невозможны (есть совпадающие числа), а в третьем случае одно из чисел a и $-a$ отрицательно.



   Критерии. Если разобраны не все случаи, то даётся не больше 2 баллов.

2. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Докажите, что при любом числе участников можно провести чемпионат с соблюдением регламента.

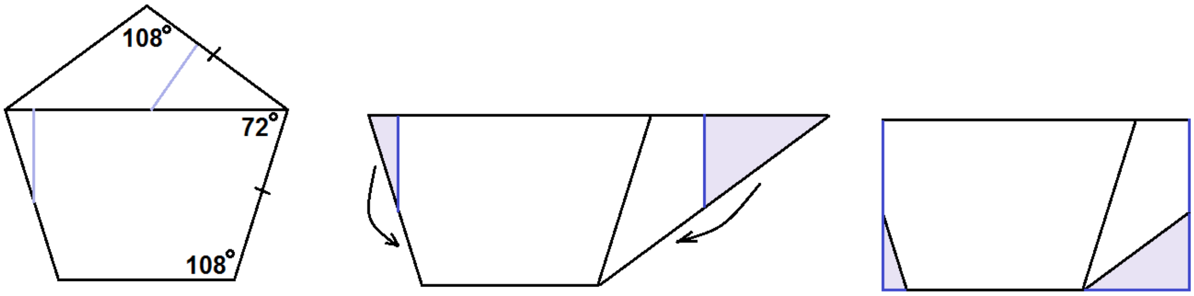
   Решение. а) Рассмотрим случай с чётным числом игроков n. Разобьём чемпионат на отдельные круги, так что в круге номер i играют участники, сумма номеров которых сравнима с i по модулю n. Тогда в каждом круге каждый игрок играет ровно один раз, и по окончании круга все сыграли поровну.

   б) Пусть игроков нечётное количество.
   1. Проведём все матчи с суммой номеров 2 по модулю n (игрок 1 отдыхает). Проведём матч $1n$. Проведём все матчи с суммой номеров n по модулю n (игрок n отдыхает). По итогам этого «двойного круга» все сыграли по два матча и в процессе всё было по регламенту.
   2. Проделаем то же, заменив игроков 1 и n на 2 и $n-1$, а суммы — на $2 \cdot 2$ и $2(n-1)$. Действуем так и далее. В итоге в k-м круге проходят все матчи с суммой модулей $2k$ и $2(n+1-k)$, а также очередной матч с суммой модулей 1 (которая не получается таким способом), k меняется от 1 до $(n-1)/2$.

   Критерии. Случай чётного n оценивается в 3 балла, случай нечётного n — в 4 балла. Если приведена только идея разбиения участников на пары, то даётся 1 балл.

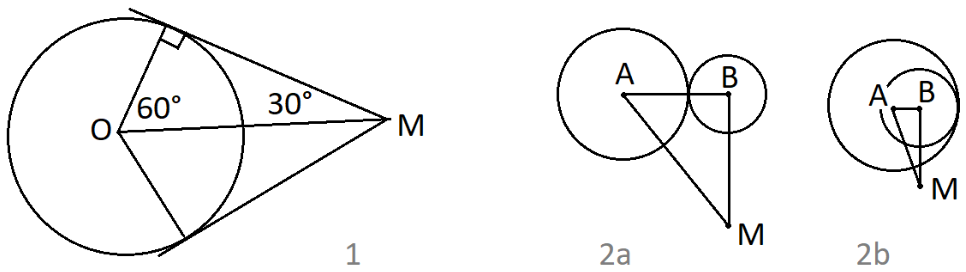
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).



4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.

Решение. Заметим (см. рис. 1), что точка M удобна для окружности с центром O тогда и только тогда, когда OM вдвое больше радиуса.



Не умаляя общности, пусть окружности имеют радиусы $r_A \geqslant r_B$. Так как они касаются, то $AB = r_A \pm r_B$ (плюс при внешнем касании и минус при внутреннем, см. рис. 2). С другой стороны, $AM = 2r_A$ и $BM = 2r_B$, потому что M удобная для обеих окружностей. В треугольнике AMB сторона AM является гипотенузой, так как $2r_A \geqslant 2r_B$ и $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. Получаем уравнение

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_Ar_B + r_B^2,$$

то есть $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_Ar_B$. Если касание внутреннее, то $r_A = r_B$, но тогда $A = B$ и AMB не будет треугольником. Если же касание внешнее, то $r_A = \frac{5}{3}r_B$. Следовательно, отношение радиусов равно $3:5$.

Критерии. Если не учитывается, что окружности могут касаться внутренним образом, то снимается 2 балла.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

Решение. Перепишем уравнение в виде $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. В силу симметрии достаточно найти все решения с $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, то есть $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ и $a \in \{1,2,3\}$. В случае $a = 1$ выполнено неравенство $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть решений нет. Если $a = 2$, то $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)^{-1} < 7$. В этом случае имеется 3 решения $(a,b,c) = (2,4,15), (2,5,9), (2,6,7)$ (при $b = 2$ и $b = 3$ уравнение на c не имеет решений в натуральных числах). Наконец, если $a = 3$, то $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}}-1)^{-1} < 5$. Это даёт ещё 2 решения $(a,b,c) = (3,3,8), (3,4,5)$. С учётом перестановок всего имеется 27 решений.

Критерии. Если найдена только часть решений, то даётся не больше 2 баллов.

6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.
б) 10.
Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

7. $f(x)$ — линейная функция, причём уравнение $f(f(x))=x+1$ не имеет решений. Найдите все возможные значения величины $f(f(f(f(f(2022)))))-f(f(f(2022)))-f(f(2022))$.

Решение. Пусть $f(x)=kx+b$, тогда $f(f(x))=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b$. Уравнение может не иметь решений только при $k^2=1$, то есть для функций $x+b$ или $-x+b$, поэтому в ответе получается либо $(2022+5b)-(2022+3b)-(2022+2b)=-2022$, либо
$(-2022+b)-(-2022+b)-2022=-2022$.

Ответ: -2022.

Критерии. За пробелы в доказательстве того, что $k=\pm1$, снимается не больше 2 баллов.

8. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.

Решение. Перейдём к изучению **не**эффективности (1 минус эффективность). Из формулы для функции Эйлера следует, что она равна $\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\ldots\frac{p_k-1}{p_k}$, где $p_1,\ldots,p_k$ — всевозможные различные простые делители n. Тогда, добавляя новый простой множитель, можно повысить эффективность, то есть в пункте (б) ответ «нет».

Наименьшее число с эффективностью больше 80% — это $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13=30030$. Его эффективность равна $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot=\frac{809}{1001}$. Докажем, что оно эффективнее, чем все меньшие его числа. Действительно, наличие простого множителя в степени выше первой не влияет на эффективность, значит, у искомого числа все множители в первой степени. Если множители не являются подряд идущими простыми числами, то при замене одного из простых чисел на меньшее эффективность увеличится. Значит, «рекорды эффективности» могут ставить только числа вида «произведение первых нескольких простых»; но эффективность числа $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ слишком мала.

Критерии. Пункт а) оценивается в 5 баллов, пункт б) — в 2 балла.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

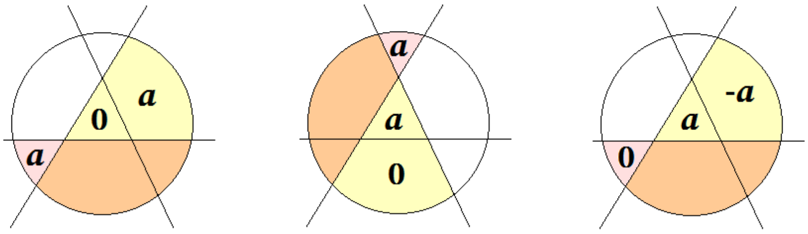
Problems for grade R10

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

1. A circle is divided into 7 parts by 3 lines. Maria wrote 7 different integers into these parts (one number in each part) so that the sum of numbers on one side of each line is equal to the sum of numbers on the other side. One of the numbers is 0. Prove that some other number is negative.

   Solution. Let's analyze three cases of zero location. On the pictures, the sum of the yellow sectors is equal to the sum of the pink ones (because yellow + orange = pink + orange = half the sum of all numbers). We see that the first two cases are impossible (because some numbers are equal), and in the third case one of the numbers a and $-a$ is negative.



   Criteria. Not more than 2 points if not all the cases are considered.

2. A chess championship is held in a village club: each participant must play one game with each other. There is only one board in the club, so two games cannot be played at the same time. According to the rules of the championship, at any moment the number of games already played by different participants must differ by no more than 1. Prove that, for any number of participants, it is possible to hold the championship in compliance with the rules.

   Solution. a) Consider the case with an even number of players n. Let's divide the championship into separate circles, so that in circle number i there are participants whose sum of numbers equals i modulo n. Then in each round each player plays exactly once, and at the end of the round everyone has played the same number of games.

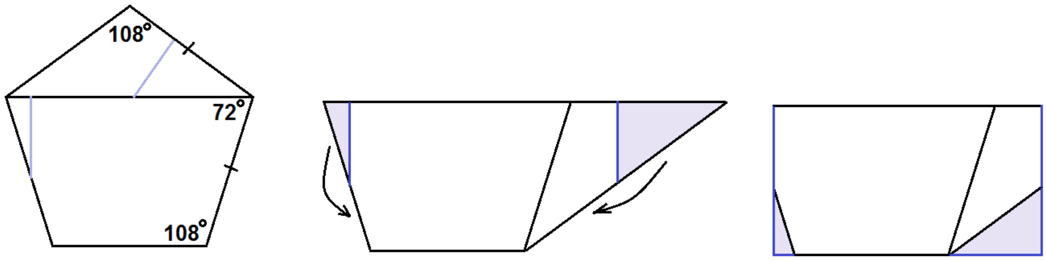
   b) Let there be an odd number of players.
   1. Let's play all matches with the sum of numbers 2 modulo n (player 1 rests). Let's play a $1n$ match. Let's play all the matches with the sum of the numbers 0 modulo n (player n rests). As a result of this "double round", everyone played two matches, and all the rules are followed.

   2. Let's do the same, replacing the players 1 and n with 2 and $n-1$, and the sums — with $2 \cdot 2$ and $2(n-1)$.
   We continue to do so. As a result, in the kth round ($k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$), all matches with the sum of remainders $2k$ and $2(n+1-k)$ take place, as well as the next match with the sum of remainders 1 (which cannot be obtained in this way).

   Criteria. The case of even n is worth 3 points, the case of odd n — 4 points. If only the idea of splitting participants into pairs is given, then 1 point is given.

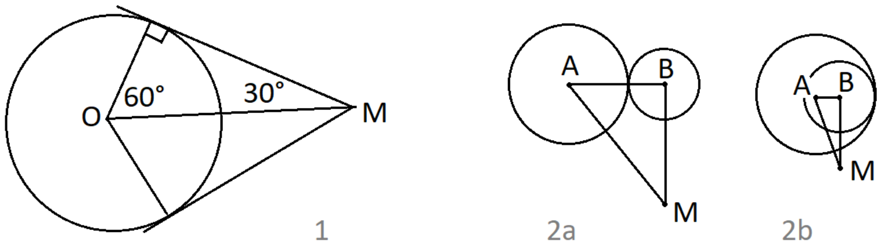
3. Prove that it is possible to cut a regular pentagon into 4 parts and rearrange them to make a rectangle without gaps and overlays.

Solution. By cutting off and shifting the triangle we obtain a trapezoid (this follows from the angles marked on the picture and the equality of the sides). Next, cutting off two right triangles from the trapezoid, we rotate them and get a rectangle (see figure).



4. We will call a point *convenient* for a circle if the angle between the tangents drawn from this point to the circle is equal to 60°. Two circles with centers A and B are tangent, and the point M is convenient for each of them. Find the ratio of the radii of the circles if $\triangle ABM$ is a right triangle.

   Solution. Note (see fig. 1) that point M is *convenient* for a circle with center O if and only if OM is twice the radius.



   Without loss of generality, let the circles have radii $r_A \geqslant r_B$. Since they are touching, $AB = r_A \pm r_B$ (plus when touching externally and minus when touching internally, see fig. 2). On the other hand, $AM = 2r_A$ and $BM = 2r_B$ because M is convenient for both circles. In triangle AMB, side AM is the hypotenuse, since $2r_A \geqslant 2r_B$ and $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. So we get the equation

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_A r_B + r_B^2,$$

   i.e. $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_A r_B$. If the tangency is internal, then $r_A = r_B$, but then $A = B$ and AMB is not a triangle. If the tangency is external, then $r_A = \frac{5}{3} r_B$. Therefore, the ratio of the radii is $3:5$.

   Criteria. If it is not taken into account that the circles can touch internally, then 2 points are deducted.

5. How many solutions in positive integers the equation $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$ has?

   Solution. Let's rewrite the equation as $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. By symmetry, it suffices to find all solutions with $a \leqslant b \leqslant c$. Then $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, i.e. $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ and $a \in \{1,2,3\}$. In the case $a = 1$ the inequality $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$ is satisfied, i.e. there are no solutions. If $a = 2$ then $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, i.e. $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)^{-1} < 7$. In this case, there are 3 solutions $(a,b,c) = (2,4,15),(2,5,9),(2,6,7)$ (for $b = 2$ and $b = 3$ the equation on c has no solutions in natural numbers). Finally, if $a = 3$, then $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, i.e. $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}}-1)^{-1} < 5$. This gives 2 more solutions $(a,b,c) = (3,3,8),(3,4,5)$. Including permutations, there are 27 solutions in total.

   Criteria. Not more than 2 points if only a part of the solutions is found.

6. A park has a shape of a 10×10 cells square. A street light can be placed in any cell (but no more than one light in each cell).

a) A park is called *illuminated* if, no matter in which cell a visitor stands, there exists a square of 9 cells containing the visitor and a light. What minimal number of lights is required to illuminate the park?
b) A park is called *securely illuminated* if it remains illuminated even when one arbitrary street light is broken. What is the minimal number of lights in a securely illuminated park?

Solution. a) 4. Let's divide the park into 4 quarters (5×5 squares), then each quarter contains at least one light (otherwise e. g. the corner is not illuminated). Placing a light in the center of each quarter, we get an example.

b) 10.
Estimation. Each 3×3 corner square must contain at least two lights (to illuminate the corner cell). Let us temporarily leave only these 8 lights. Each of them illuminates only within its quarter, and if a light in the center of a quarter is broken (or if it doesn't exist), then there is a "dark" five-cell strip along the border of this quarter. Note that the union of two such strips for opposite quarters in any case cannot be illuminated with one light, so we need at least two more lights.

An example:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Criteria. Part (a) costs 2 points (1 for the example an 1 for an estimation). In the part (b), 2 points are given for an example and 3 points for an estimation (1 point of them for a that 8 lights are not enough).

7. $f(x)$ is a linear function such that the equation $f(f(x)) = x + 1$ has no solutions. Find all possible values of $f(f(f(f(f(2022))))) - f(f(f(2022))) - f(f(2022))$.

Solution. Let $f(x) = kx+b$, then $f(f(x)) = k(kx+b)+b = k^2x+kb+b$. The equation may not have solutions only for $k^2 = 1$, that is, for the functions $x+b$ or $-x+b$, so the answer is either $(2022+5b)-(2022+3b)-(2022+2b) = -2022$, or $(-2022+b)-(-2022+b)-2022 = -2022$.

Answer: -2022.

Criteria. No more than 2 points are taken away for gaps in a proof that $k = \pm 1$.

8. Let's call *efficiency* of a positive integer n the fraction of all integers from 1 to n that have a common divisor greater than 1 with n. For example, the efficiency of the number 6 is $\frac{2}{3}$.
a) Is there a number with efficiency more than 80%? If so, find the smallest such number.
b) Is there a number whose efficiency is maximal (that is, not less than that of any other number)? If so, find the smallest such number.

Solution. Let's study **in**efficiency (i. e. 1 minus efficiency). It follows from the formula of Euler's function that inefficiency equals to $\frac{p_1-1}{p_1} \cdot \ldots \frac{p_k-1}{p_k}$, where $p_1, \ldots, p_k$ are all possible different prime divisors of n. Then, by adding a new prime factor, we can increase efficiency, that is, in point (b) the answer is no.

The smallest number with efficiency greater than 80% is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. Its efficiency is $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13}$. Let us prove that it is more efficient than all its smaller numbers.

Indeed, if a number is divisible by p^k ($k > 1$) then we can divide it by k without changing the efficiency. So all prime factors of the desired number are different. Further, if the factors are not consecutive prime numbers, then replacing one of them with a smaller one will increase efficiency. This means that "efficiency records" can only be set by numbers of the form "product of the first few primes", and the efficiency of $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ is less than 80%.

Criteria. 5 points for part (a), 2 points for (b).

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Problems for grade R11

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

1. Let us call a positive integer *useful* if its decimal notation contains neither zeroes nor equal digits, and if the product of all its digits is divisible by the sum of these digits. Find two maximal consecutive (i. e. differing by 1) useful numbers.

   Answer: 9875213 and 9875214.

   Solution. These two numbers satisfy all conditions. Let us prove that they are maximal. For consecutive numbers, the sums of digits are consecutive (otherwise we have a transition through the digit, that is, 0 at the end). But then the maximum possible sums of digits are 35 and 36 (among any two larger ones, from 37 to $45 = 1 + \ldots + 9$, at least one has a prime divisor greater than 9). Consecutive useful numbers have no more than seven digits, otherwise the sum of their digits will be at least $1 + \ldots + 8 = 36$ each. There are no consecutive useful numbers of the form $9876 * * *$, since the sum of digits of such numbers is at least $9+8+7+6+1+2+3 = 36$. And consecutive useful numbers of the form $9875 * * *$ can differ from those found only by permutation of the last digits (otherwise the sum of their digits is greater than 36), so the numbers we found are really the largest.

   Criteria. 2 points for the answer and 5 points for an estimation.

2. Four cars A, B, C and D start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C and D — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race A meets C for the first time, and at the same moment B meets D for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of all four cars?

   Solution. A and C meet once every 7 minutes, and A and B — once every 53 minutes. So, all together they will meet at such time that is a multiple of both 7 and 53, hence once in $7 \cdot 53 = 371$ minutes. From the other hand, B meets D every 7 minutes as well, so at the 371^{st} minutes D will be at the same place as the rest 3 cars.

   Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If it is stated that any of cars' speeds are equal — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.

3. Prove that it is possible to cut a regular pentagon into 4 parts and rearrange them to make a rectangle without gaps and overlays.

   Solution. By cutting off and shifting the triangle we obtain a trapezoid (this follows from the angles marked on the picture and the equality of the sides). Next, cutting off two right triangles from the trapezoid, we rotate them and get a rectangle (see figure).