Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.

   Решение. Числа 9875213 и 9875214 полезны. Докажем, что бо́льших последовательных полезных чисел не существует. У последовательных чисел и суммы цифр последовательны (иначе имеем переход через разряд, то есть 0 на конце). Но тогда максимальные возможные суммы цифр — 35 и 36 (среди любых двух бо́льших сумм хотя бы одна имеет простой делитель, больший 9, или превосходит $1+\ldots+9=45$). Последовательные полезные числа не более чем семизначные, иначе суммы их цифр будут не меньше $1+\ldots+8=36$ у каждого. Последовательных полезных чисел вида $9876***$ не бывает, так как у таких чисел суммы цифр не меньше $9+8+7+6+1+2+3=36$. А последовательные полезные числа вида $9875***$ могут отличаться от найденных только перестановкой последних цифр (иначе суммы их цифр больше 36), так что найденные числа действительно наибольшие.

   Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

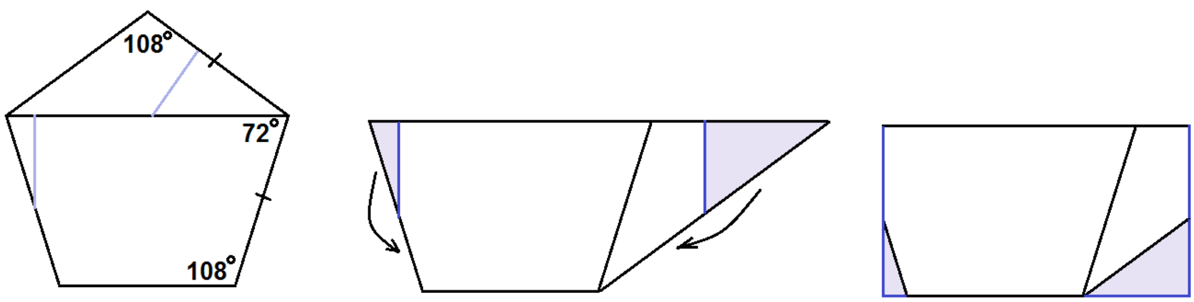
2. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?

   Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7\cdot 53=371$ минут. При этом B и D тоже встречаются каждые 7 минут, поэтому на 371-й минуте машина D будет в той же точке, что и остальные три машины.

   Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

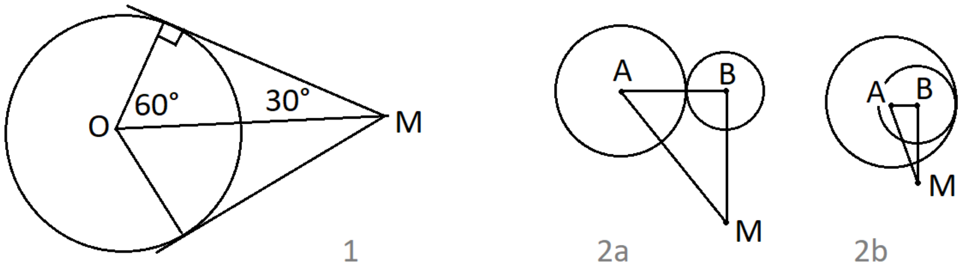
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

   Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).



4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.

Решение. Заметим (см. рис. 1), что точка M удобна для окружности с центром O тогда и только тогда, когда OM вдвое больше радиуса.



1 2a 2b

Не умаляя общности, пусть окружности имеют радиусы $r_A \geqslant r_B$. Так как они касаются, то $AB = r_A \pm r_B$ (плюс при внешнем касании и минус при внутреннем, см. рис. 2). С другой стороны, $AM = 2r_A$ и $BM = 2r_B$, потому что M удобная для обеих окружностей. В треугольнике AMB сторона AM является гипотенузой, так как $2r_A \geqslant 2r_B$ и $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. Получаем уравнение

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_Ar_B + r_B^2,$$

то есть $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_Ar_B$. Если касание внутреннее, то $r_A = r_B$, но тогда $A = B$ и AMB не будет треугольником. Если же касание внешнее, то $r_A = \frac{5}{3}r_B$. Следовательно, отношение радиусов равно $3 : 5$.

Критерии. Если не учитывается, что окружности могут касаться внутренним образом, то снимается 2 балла.

5. Найдите все тройки вещественных чисел a, b, c, для которых

$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$

Решение. По неравенству о средних,

$$\frac{27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1}}{3} \geqslant \left(27^{a^2+b+c+1} \cdot 27^{b^2+c+a+1} \cdot 27^{c^2+a+b+1}\right)^{1/3} =$$

$$= 3^{a^2+b+c+1+b^2+a+c+1+c^2+a+b+1} = 3^{(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2} \geqslant 1,$$

причём равенство достигается только при $a = b = c = -1$.

6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.

б) 10.

Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

7. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.

Решение. Перейдём к изучению **не**эффективности (1 минус эффективность). Из формулы для функции Эйлера следует, что она равна $\frac{p_1-1}{p_1} \cdot \ldots \frac{p_k-1}{p_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — всевозможные различные простые делители n. Тогда, добавляя новый простой множитель, можно повысить эффективность, то есть в пункте (б) ответ «нет».

Наименьшее число с эффективностью больше 80% — это $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. Его эффективность равна $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot = \frac{809}{1001}$. Докажем, что оно эффективнее, чем все меньшие его числа. Действительно, наличие простого множителя в степени выше первой не влияет на эффективность, значит, у искомого числа все множители в первой степени. Если множители не являются подряд идущими простыми числами, то при замене одного из простых чисел на меньшее эффективность увеличится. Значит, «рекорды эффективности» могут ставить только числа вида «произведение первых нескольких простых»; но эффективность числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ слишком мала.

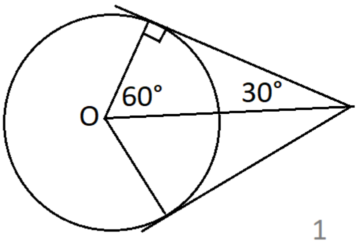
Критерии. Пункт а) оценивается в 5 баллов, пункт б) — в 2 балла.

8. Некая непрерывная функция f такова, что $f(f(f(f(f(0))))) = 0$. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет хотя бы один корень.

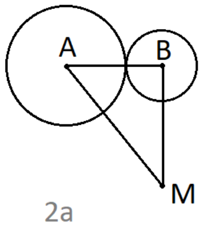
Решение. Докажем, что $f(x) = x$ имеет решение. Действительно, если это не так, то (в силу непрерывности функции $f(x) - x$) $f(x)$ либо всегда больше, либо всегда меньше, чем x, то есть при применении f результат всё время меняется в одну и ту же сторону. Но тогда условие задачи не может быть верным. Итак, существует такое x_0, что $f(x_0) = x_0$. Но тогда и $f(f(x_0)) = x_0$.

4. We will call a point *convenient* for a circle if the angle between the tangents drawn from this point to the circle is equal to 60°. Two circles with centers A and B are tangent, and the point M is convenient for each of them. Find the ratio of the radii of the circles if $\triangle ABM$ is a right triangle.

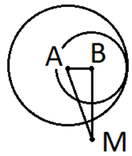
Solution. Note (see fig. 1) that point M is *convenient* for a circle with center O if and only if OM is twice the radius.



1



2a



2b

Without loss of generality, let the circles have radii $r_A \geqslant r_B$. Since they are touching, $AB = r_A \pm r_B$ (plus when touching externally and minus when touching internally, see fig. 2). On the other hand, $AM = 2r_A$ and $BM = 2r_B$ because M is convenient for both circles. In triangle AMB, side AM is the hypotenuse, since $2r_A \geqslant 2r_B$ and $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. So we get the equation

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_A r_B + r_B^2,$$

i.e. $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_A r_B$. If the tangency is internal, then $r_A = r_B$, but then $A = B$ and AMB is not a triangle. If the tangency is external, then $r_A = \frac{5}{3} r_B$. Therefore, the ratio of the radii is $3:5$.

Criteria. If it is not taken into account that the circles can touch internally, then 2 points are deducted.

5. Find all real a, b, c such that

$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$

Solution. According the means inequality,

$$\frac{27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1}}{3} \geqslant \left(27^{a^2+b+c+1} \cdot 27^{b^2+c+a+1} \cdot 27^{c^2+a+b+1}\right)^{1/3} =$$

$$= 3^{a^2+b+c+1+b^2+a+c+1+c^2+a+b+1} = 3^{(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2} \geqslant 1,$$

and the inequality turns into equality only if $a = b = c = -1$.

6. A park has a shape of a 10×10 cells square. A street light can be placed in any cell (but no more than one light in each cell).
a) A park is called *illuminated* if, no matter in which cell a visitor stands, there exists a square of 9 cells containing the visitor and a light. What minimal number of lights is required to illuminate the park?
b) A park is called *securely illuminated* if it remains illuminated even when one arbitrary street light is broken. What is the minimal number of lights in a securely illuminated park?

Solution. a) 4. Let's divide the park into 4 quarters (5×5 squares), then each quarter contains at least one light (otherwise e. g. the corner is not illuminated). Placing a light in the center of each quarter, we get an example.

b) 10.

Estimation. Each 3×3 corner square must contain at least two lights (to illuminate the corner cell). Let us temporarily leave only these 8 lights. Each of them illuminates only within its quarter, and if a light in the center of a quarter is broken (or if it doesn't exist), then there is a "dark" five-cell strip along the border of this quarter. Note that the union of two such strips for opposite quarters in any case cannot be illuminated with one light, so we need at least two more lights.

An example:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Criteria. Part (a) costs 2 points (1 for the example an 1 for an estimation). In the part (b), 2 points are given for an example and 3 points for an estimation (1 point of them for a that 8 lights are not enough).

7. Let's call *efficiency* of a positive integer n the fraction of all integers from 1 to n that have a common divisor greater than 1 with n. For example, the efficiency of the number 6 is $\frac{2}{3}$.
a) Is there a number with efficiency more than 80%? If so, find the smallest such number.
b) Is there a number whose efficiency is maximal (that is, not less than that of any other number)? If so, find the smallest such number.

Solution. Let's study **in**efficiency (i. e. 1 minus efficiency). It follows from the formula of Euler's function that inefficiency equals to $\frac{p_1-1}{p_1} \cdot \ldots \frac{p_k-1}{p_k}$, where $p_1, \ldots, p_k$ are all possible different prime divisors of n. Then, by adding a new prime factor, we can increase efficiency, that is, in point (b) the answer is no.

The smallest number with efficiency greater than 80% is $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. Its efficiency is $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13}$. Let us prove that it is more efficient than all its smaller numbers. Indeed, if a number is divisible by p^k $(k > 1)$ then we can divide it by k without changing the efficiency. So all prime factors of the desired number are different. Further, if the factors are not consecutive prime numbers, then replacing one of them with a smaller one will increase efficiency. This means that "efficiency records" can only be set by numbers of the form "product of the first few primes", and the efficiency of $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ is less than 80%.

Criteria. 5 points for part (a), 2 points for (b).

8. There is a continuous function f such that $f(f(f(f(f(0))))) = 0$. Prove that the equation $f(f(x)) = x$ has at least one solution.

Solution. Let us prove that $f(x) = x$ has a solution. Indeed, if it is not, then $f(x)$ is either always greater or always less than x (because $f(x) - x$ is continuous). So, when f is applied, the result always changes in the same direction. But in this case the condition of the problem cannot be true. So there exists x_0: $f(x_0) = x_0$. But then $f(f(x_0)) = x_0$.