Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

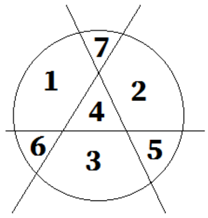
Задачи для 5 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить числа от 1 до 7 по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

   Решение. Да, например, так:



2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку, карандаш и ластик. Если она купит тетрадку, карандаш и ластик, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор, если тетрадь стоит 15 тугриков?

   Решение. Если Марина купит два набора из условия, то потратит $47+58 = 105$ тугриков, но купит лишнюю тетрадь, поэтому полный комплект школьных принадлежностей стоит $105 - 15 = 90$ тугриков.

   Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл. Если в решении подбирают стоимость ручки и карандаша (хотя в условии не сказано, что стоимость обязательно целая) — 0 баллов.

3. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы вся команда гарантированно смогла спастись в гостиной?

   Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора. Если закрыть не более 21 двери, то могут остаться открытыми коридоры между реактором и правым двигателем и правым двигателем и гостиной, то есть команда будет в опасности. Поэтому необходимо закрыть хотя бы 22 двери.

   Критерии. Верный ответ без обоснования — 0 баллов. Ошибка в подсчете числа коридоров — 4 балла.

4. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста встали в круг, после чего каждый сказал: «Я выше ученика, стоящего напротив меня!» Сколько рыцарей учится в школе?

   Решение. В каждой паре один из двух учеников действительно выше своего соседа напротив, поэтому говорит правду и является рыцарем. Итого N рыцарей.

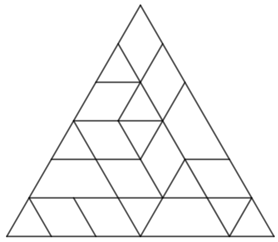
Критерии. Если никак не обоснован факт того, что в паре точно будет один рыцарь — 1 балл. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов.

5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 5?

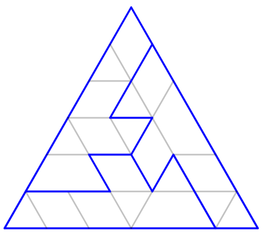
Решение. Число должно делиться на 5, поэтому буква «А» равна 0 или 5. Если она равна 0, то для остальных букв («Г», «В», «Т», «Е», «М», «Л») есть $A_9^6 = 9!/3!$ вариантов; если же «А» равна 5, то для остальных букв есть $8 \cdot A_8^5 = 8!/3!$ вариантов, так как «Г» не может равняться нулю. Всего $9!/6 + 8 \cdot 8!/6 = 114240$ способов.

Критерии. Явно указано, что для буквы «А» 2 варианта: 5 или 0 — 2 балла. Если далее разбираются 2 варианта, то ещё 5 баллов. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — не снижать.

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



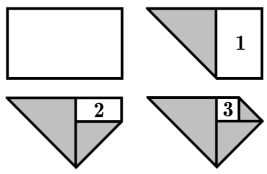
Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

7. Три автомобиля A, B и C стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все три машины встретятся в первый раз?

Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7 \cdot 53 = 371$ минут.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — 3 балла. Решено через подбор длин и скоростей — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

8. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда периметр: $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

Критерии. Ответ без обоснования или найденный подбором — 0 баллов.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

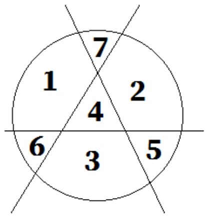
Problems for grade R5

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

1. A circle is divided into 7 parts by 3 lines. Is it possible to write the numbers from 1 to 7 into these parts (one number in each part) so that the sum of numbers on one side of each line is equal to the sum of numbers on the other side?

   Solution. Yes:



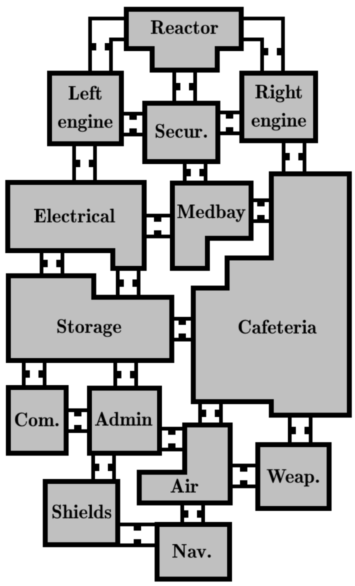
   Criteria. The correct example — 7 points. An example that does not satisfy any condition of the problem (e.g. using only numbers from 1 to 7, but with repetitions) — 0 points.

2. To participate in the Olympiad, Marina needs to buy a notebook, a pen, a ruler, a pencil and an eraser. If she buys a notebook, a pencil and an eraser, she will spend 47 tugriks. If she buys a notebook, a ruler and a pen, she will spend 58 tugriks. How much money will she need for the whole set if the notebook costs 15 tugriks?

   Solution. If Marina buys both sets given, she spends $47 + 58 = 105$ tugriks, but she gets an extra notebook, so the full set costs $105 - 15 = 90$ tugriks.

   Criteria. Only the answer is given without any explanation — 1 point. If student guesses prices of the pen and/or the pencil (although it is not said that prices are integers) — 0 points.

3. A research spacecraft has a reactor failure and some poisonous substances leak from the reactor. All corridors between rooms are equipped with airtight doors, but there is no time to close individual doors. However, the captain can give the command «Close N doors», after which the ship's artificial intelligence will close random N doors. What is the smallest N to guarantee that the whole team can survive in the cafeteria?



   Solution. There are 23 corridors in total in the spacecraft. If no more than 21 doors are closed, it is possible that the corridors between the reactor and the right engine and between the right engine and the cafeteria remain open, which puts the team in danger. Therefore, it is necessary to close at least 22 doors.

   Criteria. Only the answer is given without any explanation — 0 points. Any mistake in counting the number of corridors — 4 points.

4. A school was opened on the island of knights and liars (a knight always tells the truth, a liar always lies). All $2N$ students are of different heights. They stood in a circle and everyone said: "I am taller than the student standing in front of me!" How many knights are there in the school?

Solution. In each pair of students one of the two is actually higher, so he tells the truth and is a knight. Therefore N knights in total.

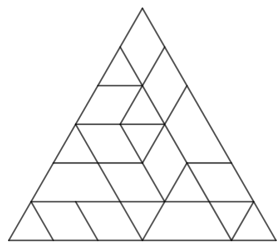
Criteria. The fact of precisely one knight in each pair is not proved in any way — 1 point. One or few examples are given as a proof — 0 points.

5. Kate wrote a number divisible by 5 on a board and encrypted it according to the rules of alphametic puzzles (different letters correspond to different digits, the same letters — to the same digits). She got the word "GUATEMALA". How many different numbers could Kate write on the board?

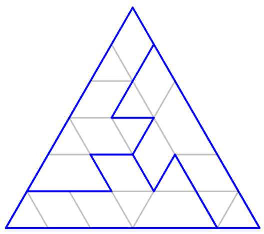
   Solution. The number must be divisible by 5, so the letter «A» is 0 or 5. If it is 0, then for the remaining letters («G», «U», «T», «E», «M», «L») there are $9!/(9-6)!$ variants; if «A» is 5, then for the remaining letters there are $8 \cdot 8!/(8-5)!$ variants, since «G» cannot be 0. In total, $9!/6 + 8 \cdot 8!/6 = 114240$ options.

   Criteria. It is explicitly stated that for the letter «A» there are 2 options: 5 or 0 — 2 points. If both options are further solved, then another 5 points. If the answer is given as a correct expression and not calculated — do not subtract any points.

6. Cut the triangle on the picture along the marked lines into three equal parts (the parts are called equal if they match both in shape and size).

   Solution.

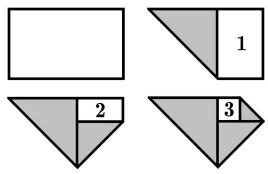
   

7. Three cars A, B and C start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race, A meets C for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of all three cars?

   Solution. A and C meet once every 7 minutes, and A and B — once every 53 minutes. So, all together they will meet at such time that is a multiple of both 7 and 53, hence once in $7 \cdot 53 = 371$ minutes.

   Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If student guesses track's length and/or cars' speeds — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.

8. There is a rectangular piece of paper with one side white and the other side grey. It was bent as shown in the picture. The perimeter of the first rectangle is 20 more than the perimeter of the second one. The perimeter of the second rectangle is 16 more than the perimeter of the third one. Find the perimeter of the whole piece of paper.

   Solution. As you can see from the picture, the perimeter of the rectangle decreases by two lengths of the short side with each folding. So the short side of rectangle-1 equals $20/2 = 10$, and the short side of rectangle-2 equals $16/2 = 8$. Hence the long side of rectangle-1 is 18, and the long side of the original sheet is 28. Then the perimeter is $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

   Criteria. If student guesses rectangles' sides in any way (or simply states the lengths of the sides without an explanation) — 0 points.