Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

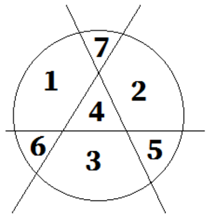
Задачи для 6 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить семь последовательных натуральных чисел по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

   Решение. Да, например, так:



2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку и карандаш. Если она купит тетрадку, карандаш и линейку, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Если же купит только ручку с карандашом, потратит 15 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор?

   Решение. Если Марина купит сразу все три набора из условия, то потратит $47 + 58 + 15 = 120$ тугриков, при этом каждый элемент купит два раза, поэтому полный комплект школьных принадлежностей стоит $120/2 = 60$ тугриков.

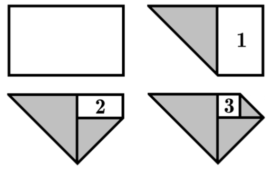
   Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл. Если в решении подбирают стоимость ручки и карандаша (хотя в условии не сказано, что стоимость обязательно целая) — 0 баллов.

3. Исследовательский космический корабль входит в пояс астероидов, которые могут повредить корпус корабля, что приведет к разгерметизации. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями. У капитана есть дроид-помощник, который может закрывать (но не открывать обратно) двери в тех коридорах, где он проезжает. Сможет ли дроид закрыть все двери на корабле?

   Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора и 14 отсеков. Каждое посещение дроидом одного отсека перекрывает два коридора: через который он попал в помещение и через который покинул его. Поэтому во всех помещениях, кроме, может быть, двух, должно быть четное число выходов (два помещения могут служить начальной и конечной точкой маршрута, и тогда в них может быть нечетное количество выходов). Однако на космическом корабле есть 6 таких помещений (гостиная, хранилище, мед. отсек, двигатели и реактор), поэтому дроид не сможет закрыть все двери.

   Критерии. Если в решении упоминается, что дроид идёт по эйлеровому пути или что в его пути может быть только 2 комнаты, в которых нечётное число дверей — 3 балла. Рассуждения на примерах — 0 баллов.

4. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда периметр: $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

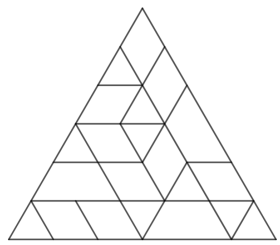
Критерии. Ответ без обоснования или найденный подбором — 0 баллов.

5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 25?

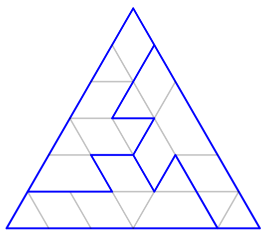
Решение. Число должно делиться на 25, поэтому «ЛА» равно 25, 50 или 75 (00 быть не может, так как буквы разные). Если «ЛА» равно 50, то для остальных букв («Г», «В», «Т», «Е», «М») есть A_8^5 вариантов; иначе для остальных букв есть $7 \cdot A_7^4$ вариантов. Всего $8!/6 + 2 \cdot 7 \cdot 7!/6 = 18480$ способов.

Критерии. Явно указано, что для букв «ЛА» не подходит вариант 00, и продемонстрированы все 3 случая — 3 балла. Если далее разбираются 2 варианта без ошибок, то ещё 4 балла. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — не снижать.

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).
Б) Если окажется, что все ученики одного роста, то все врут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

8. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

   Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

   Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

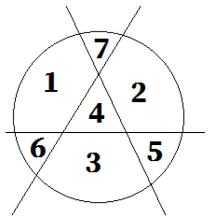
Problems for grade R6

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

1. A circle is divided into 7 parts by 3 lines. Is it possible to write 7 consecutive positive integers into these parts (one number in each part) so that the sum of numbers on one side of each line is equal to the sum of numbers on the other side?

   Solution. Yes:



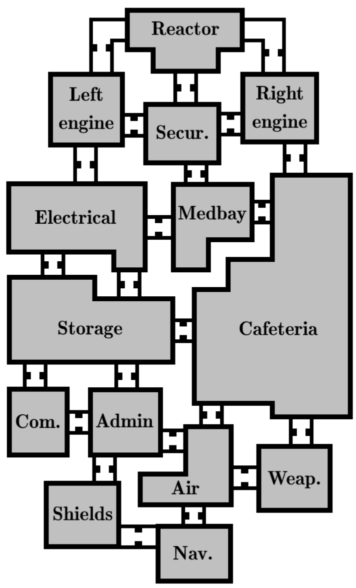
   Criteria. The correct example — 7 points. An example that does not satisfy any condition of the problem (e.g. using not only positive consecutive integers) — 0 points.

2. To participate in the Olympiad, Marina needs to buy a notebook, a pen, a ruler, a pencil. If she buys a notebook, a pencil and a ruler, she will spend 47 tugriks. If she buys a notebook, a ruler and a pen, she will spend 58 tugriks. If she buys a pen and a pencil, she will spend 15 tugriks. How much money will she need for the whole set?

   Solution. If Marina buys all the three sets given, she spends $47 + 58 + 15 = 120$ tugriks for 2 full sets. Therefore one full set costs $120/2 = 60$ tugriks.

   Criteria. Only the answer is given without any explanation — 1 point. If student guesses prices of the pen and/or the pencil (although it is not said that prices are integers) — 0 points.

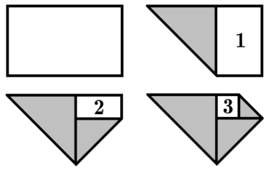
3. A research spacecraft enters an asteroid belt that may damage the ship's hull, causing depressurization. All corridors between rooms are equipped with airtight doors. The captain has an assistant droid that can close (but not open back) the doors in the corridors he passes through. Will the droid be able to close all the doors on the spacecraft?



   Solution. There are 23 corridors and 14 compartments in the spacecraft. Every time the droid goes through one of the compartments, it closes two corridors: the one it entered the room through and the one it left through. Therefore, in all the rooms, except for, maybe, two of them, there should be an even number of entrances (those two rooms can become starting and ending points of the droid's route, so there can be an odd number of entrances). However, there are 6 such rooms in the spacecraft (cafeteria, storage, medbay, both engines and reactor), so the droid will not be able to close all the doors.

Criteria. If the solution mentions that the droid follows the Eulerian (unicursal) path or that there can be no more than 2 rooms in it's path with an odd number of doors — 3 points. One or few examples are given as a proof — 0 points.

4. There is a rectangular piece of paper with one side white and the other side grey. It was bent as shown in the picture. The perimeter of the first rectangle is 20 more than the perimeter of the second one. The perimeter of the second rectangle is 16 more than the perimeter of the third one. Find the perimeter of the whole piece of paper.



Solution. As you can see from the picture, the perimeter of the rectangle decreases by two lengths of the short side with each folding. So the short side of rectangle-1 equals $20/2 = 10$, and the short side of rectangle-2 equals $16/2 = 8$. Hence the long side of rectangle-1 is 18, and the long side of the original sheet is 28. Then the perimeter is $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

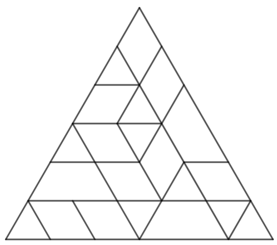
Criteria. If student guesses rectangles' sides in any way (or simply states the lengths of the sides without an explanation) — 0 points.

5. Kate wrote a number divisible by 25 on the board and encrypted it according to the rules of alphametic puzzles (different letters correspond to different digits, the same letters — the same digits). She got the word "GUATEMALA". How many different numbers could Kate write on the board?

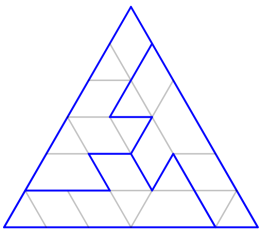
Solution. The number must be divisible by 25, so LA is equal to 25, 50 or 75 (00 is not possible since the letters are different). If $\overline{LA}$ is equal to 50, then for the remaining letters (G, U, T, E, M) there are $8!/(8-5)!$ variants; otherwise for the remaining letters there are $7 \cdot 7!/(7-4)!$ options. In total, $8!/6 + 2 \cdot 7 \cdot 7!/6 = 18480$.

Criteria. It is shown that option 00 is not suitable for the letters LA and all 3 cases are demonstrated — 3 points. If both options are further solved correctly — 4 more points. If the answer is given as a correct expression and not calculated — do not subtract any points.

6. Cut the triangle on the picture along the marked lines into three equal parts (the parts are called equal if they match both in shape and size).



Solution.



7. A school was opened on the island of knights and liars (a knight always tells the truth, a liar always lies). All $2N$ students lined up in pairs one after another (in other words, in two equal columns). The two people standing first said: "I am taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person behind me". The last two said: "I am also taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person in front of me". Finally, everyone else said: "I am taller than 3 people: my neighbor in a pair, the person in front of me and the person behind me".
a) Find the maximal possible amount of knights among the students.
b) Is it possible for all the students to be liars?

Solution. A) There is no more than one knight in each pair, so there are no more than N knights (this amount can be achieved by placing N higher students in chess order).
B) Yes. If all the students are of the same height, then everyone is lying.

Criteria. Problem a) is fully solved — 5 points. If only one part of the solution is given (either an estimation or an example) — 2 points. One or few examples are given as a proof — 0 points. Problem b) is fully solved — 2 points.

8. Four cars A, B, C and D start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C and D — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race A meets C for the first time, and at the same moment B meets D for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of C and D?

   Solution. If A meets C and B meets D every 7 minutes, then their convergence speeds are equal: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Therefore, the removal speeds of A with B and C with D are equal: $V_A - V_B = V_D - V_C$. So, since A meets B for the first time at the 53^{rd} minute, then C and D will meet for the first time at the same moment.

   Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If it is stated that any of cars' speeds are equal — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.