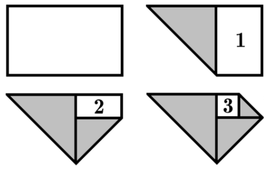
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

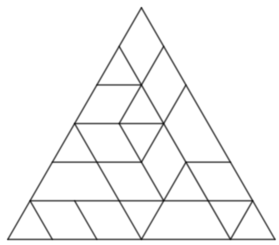
1. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите площадь исходного листа.



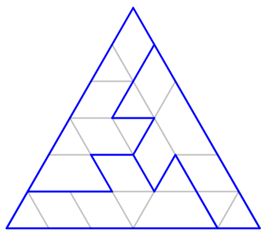
Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда площадь: $28 \cdot 18 = 504$.

Критерии. В ответе дан периметр вместо площади — 3 балла. Подбор длин в любом проявлении (или просто заявлены длины сторон пронумерованных прямоугольников без обоснования) — 0 баллов.

2. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

3. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 8?

Решение. Чтобы число делилось на 8, «АЛА» должно делиться на 8, при этом «А» — четная цифра. «АЛА» $= 101 \cdot$ «А» $+ 10 \cdot$ «Л» $= (100 \cdot$ «А» $+ 8 \cdot$ «Л»$)$ $+$ «А» $+ 2 \cdot$ «Л», где записанное в скобках выражение заведомо делится на 8, поэтому достаточно потребовать, чтобы («А» $+ 2 \cdot$ «Л»)$\,\vdots\,8$. Перебором находим 11 вариантов: (0,4), (0,8), (2,3), (2,7), (4,2), (4,6), (6,1), (6,5), (6,9), (8,0), (8,4). В трех из них, где есть ноль, для оставшихся пяти букв («Г», «В», «Т», «Е», «М») остается $A_8^5 = 8!/3!$ вариантов; в остальных восьми — $7 \cdot A_7^4 = 7 \cdot 7!/3!$. Итого: $3 \cdot 8!/3! + 8 \cdot 7 \cdot 7!/3! = 67200$.

Критерии. Сформулирован признак делимости на 8 и явно обозначено, что «А» — четная цифра — 1 балл. Доказано, что «А» + 2«Л» или 5«А» + 10«Л» делится на 8 — 3 балла. За каждый потерянный случай вариантов для букв «А» и «Л» отнимается 1 балл. Если случаи с 0 обсчитаны так же, как и случаи без 0, отнимается 2 балла.

4. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?

   Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7 \cdot 53 = 371$ минут. При этом B и D тоже встречаются каждые 7 минут, поэтому на 371-й минуте машина D будет в той же точке, что и остальные три машины.

   Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?

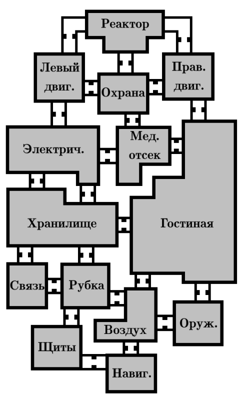
   Решение. Посмотрим на произвольное число строки x^2. Под ним окажется написано

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{2} = \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}{2} = \frac{2x^2 + 2}{2} = x^2 + 1.$$

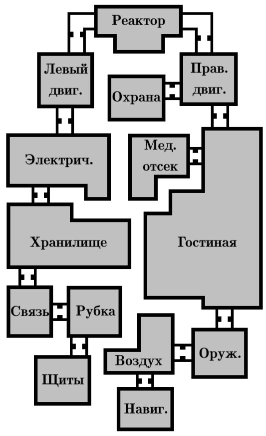
   Таким образом, каждый раз число увеличивается на единицу. Изначально чисел 2022, и каждый раз их становится на 2 меньше, поэтому операцию проделают 1010 раз, и останутся два центральных числа, увеличенных на 1010: $1011^2 + 1010 = 1023131$ и $1012^2 + 1010 = 1025154$.

   Критерии. Доказано в общем виде, что при каждой операции число увеличивается на 1 — 3 балла. Решено верно без грамотного доказательства увеличения на 1 — 4 балла. Ошибка в подсчете остающихся чисел — -2 балла.

6. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы гарантированно хотя бы один из отсеков корабля остался пригодным для жизни?



Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора и 14 отсеков. Воспользуемся теорией графов: пусть отсеки — вершины, а коридоры — ребра. Тогда, чтобы такой граф оставался связным (т.е. чтобы между любыми двумя вершинами был путь) с минимальным количеством ребер, он должен быть деревом, а тогда в нем должно быть хотя бы $14 - 1 = 13$ ребер. Иными словами, если закрыть не более $23 - 13 = 10$ дверей, то может остаться открытым сквозной проход между всеми отсеками (см. рис.), то есть команда будет в опасности. Если же в графе останется менее 13 ребер, то он автоматически станет несвязным. Поэтому необходимо закрыть хотя бы $10 + 1 = 11$ дверей и укрыться в тех отсеках, которые будут полностью отрезаны от реактора.



Критерии. Показано, что менее 11 дверей не хватит (например, приведен пример на 10 дверей и показано, что останется проход между всеми отсеками) — 3 балла. Доказано, что 11 закрытых дверей достаточно — 3 балла. Ошибка в подсчетах количества отсеков и/или коридоров — -2 балла.

7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Существуют ли два последовательных трёхзначных полезных числа?

Решение. Да, например 578 и 579; 875 и 876.

Критерии. Правильный ответ без проверки — 5 баллов.

8. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).
Б) Так как все ученики разного роста, самый высокий из них заведомо выше своих соседей, поэтому является рыцарем, то есть все лжецами быть не могут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

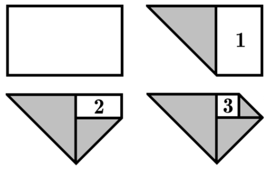
International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Problems for grade R7

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

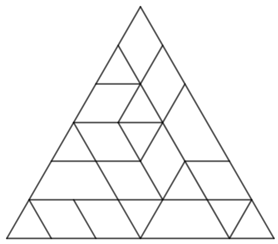
1. There is a rectangular piece of paper with one side white and the other side grey. It was bent as shown in the picture. The perimeter of the first rectangle is 20 more than the perimeter of the second one. The perimeter of the second rectangle is 16 more than the perimeter of the third one. Find the area of the whole piece of paper.



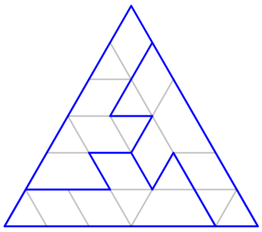
Solution. As you can see from the picture, the perimeter of the rectangle decreases by two lengths of the short side with each folding. So the short side of rectangle-1 equals $20/2 = 10$, and the short side of rectangle-2 equals $16/2 = 8$. Hence the long side of rectangle-1 is 18, and the long side of the original sheet is 28. Then the area equals $28 \cdot 18 = 504$.

Criteria. The perimeter of the rectangle is given as an answer instead of area — 3 points. If student guesses rectangles' sides in any way (or simply states the lengths of the sides without an explanation) — 0 points.

2. Cut the triangle on the picture along the marked lines into three equal parts (the parts are called equal if they match both in shape and size).



Solution.



3. Kate wrote a number divisible by 8 on a board and encrypted it according to the rules of alphametic puzzles (different letters correspond to different digits, the same letters — the same digits). She got the word "GUATEMALA". How many different numbers could Kate write on the board?

Solution. In order for a number to be divisible by 8, «ALA» must be divisible by 8 with «A» to be an even digit. «ALA» $= 101 \cdot$ «A» $+ 10 \cdot$ «L» $= (100 \cdot$ «A» $+ 8 \cdot$ «L»$) +$ «A» $+ 2 \cdot$ «L». The part in brackets is obviously divisible by 8, so it is enough to require for («A» $+ 2 \cdot$ «L») be divisible by 8. There are 11 options for that to happen: (0,4), (0,8), (2,3), (2,7), (4,2), (4,6), (6,1), (6,5), (6,9), (8,0), (8,4). In three of them with zero for the remaining five letters («G», «U», «T», «E», «M») there are $8!/(8-5)!$ options; in the other eight — $7 \cdot 7!/(7-4)!$. In total, $3 \cdot 8!/3! + 8 \cdot 7 \cdot 7!/3! = 67200$.

Criteria. The criteria of divisibility by 8 is said and it is clearly indicated that «A» is even — 1 point. It is proved that «A» + 2«L» or 5«A» + 10«L» is divisible by 8 — 3 points. For each lost case for «A» and «L» 1 point sould be deducted. If cases with 0 are calculated in the same way as others — 2 points should be subtracted.

4. Four cars A, B, C and D start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C and D — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race A meets C for the first time, and at the same moment B meets D for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of all four cars?

Solution. A and C meet once every 7 minutes, and A and B — once every 53 minutes. So, all together they will meet at such time that is a multiple of both 7 and 53, hence once in $7 \cdot 53 = 371$ minutes. From the other hand, B meets D every 7 minutes as well, so at the 371^{st} minutes D will be at the same place as the rest 3 cars.

Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If it is stated that any of cars' speeds are equal — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.

5. The squares of the first 2022 natural numbers are written in a row: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. For each written number, except for the first and the last ones, the arithmetic mean of its left and right neighbors was calculated and written under it (for example, $\frac{1+9}{2} = 5$ was written under the number 4). For the resulting string of 2020 numbers, we did the same. So we continued until we reached a line in which there are only two numbers. Find these numbers.

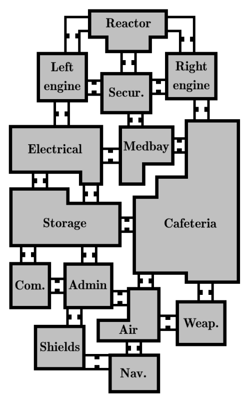
Solution. Let's take a look at one of the numbers x^2. Under it

$$\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{2} = \frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{2} = \frac{2x^2+2}{2} = x^2+1$$

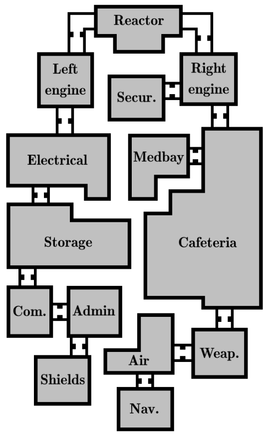
will be written, so each time numbers increase by one. Initially, there are 2022 numbers and each time 2 of them disappears, so there will be 1011 lines of numbers, and in the very last line there will be two central numbers increased by 1010: $1011^2+1010 = 1023131$ and $1012^2+1010 = 1025154$.

Criteria. It is proved generally that each time every number increases by 1 — 3 points. If the problem is solved correctly without a competent proof of the increment — 4 points. Any mistake in counting the remaining numbers — -2 points.

6. A research spacecraft has a reactor failure and some poisonous substances leak from the reactor. All corridors between rooms are equipped with airtight doors, but there is no time to close individual doors. However, the captain can give the command «Close N doors», after which the ship's artificial intelligence will close random N doors. What is the smallest N to guarantee that at least one of the compartments of the ship will be safe?



Solution. There are 23 corridors and 14 compartments in the spacecraft. It can be interpreted as a graph, where the compartments are vertices and the corridors are edges. In order for such a graph to remain connected (so that there is a path between any two vertices) with a minimum number of edges, it must be a graph-tree, so it must have at least $14 - 1 = 13$ edges. In other words, if you close no more than $23 - 13 = 10$ doors, then it is possible to a way between all the compartments exist(see Fig.), what puts the team in danger. Therefore, it is necessary to close at least $10 + 1 = 11$ doors and hide in those compartments that are completely «cut off» from the reactor (indeed, closing any other corridor in the figure will lead to the «cutting off» part of the compartments from the reactor).



Criteria. It is shown that less than 11 doors will not be enough (e.g. an example is given for 10 doors and it is shown that there will be a passage between all compartments) — 3 points. It is proved that 11 closed doors are enough — 3 points. Any mistake in counting the number of corridors and/or compartments — −2 points.

7. Let us call a positive integer *useful* if its decimal notation contains neither zeroes nor equal digits, and if the product of all its digits is divisible by the sum of these digits. Are there any two consecutive 3-digit useful numbers?

Solution. Yes. For example: 578, 579 or 875, 876.

Criteria. If only the right example is given without justification — 5 points.

8. A school was opened on the island of knights and liars (a knight always tells the truth, a liar always lies). All $2N$ students are of different heights. They lined up in pairs one after another (in other words, in two equal columns). The two people standing first said: "I am taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person behind me". The last two said: "I am also taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person in front of me". Finally, everyone else said: "I am taller than 3 people: my neighbor in a pair, the person in front of me and the person behind me".
a) Find the largest possible number of knights among the students.
b) Is it possible for all the students to be liars?

Solution. A) There is no more than one knight in each pair, so there are no more than N knights (this amount can be achieved by placing N higher students in chess order).
B) No. All the students are of the different heights, so the heighest of them is always a knight.

Criteria. Problem a) is fully solved — 5 points. If only one part of the solution is given (either an estimation or an example) — 2 points. One or few examples are given as a proof — 0 points. Problem b) is fully solved — 2 points.