Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

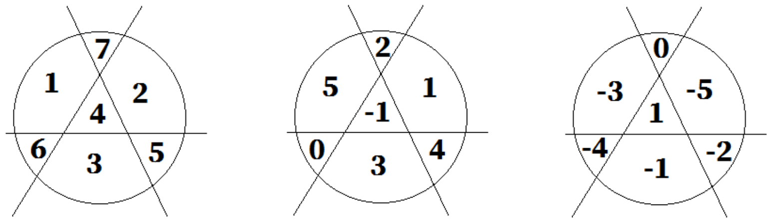
Задачи для 8 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и хочет написать в них 7 последовательных целых чисел (в каждой по числу) так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Придумайте для него три примера, различающихся наборами использованных чисел.

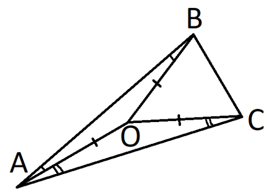
   Решение. Вот три возможных примера (есть и другие):



2. *Разламыванием* остроугольного треугольника ABC будем называть операцию, когда внутри него ставят такую точку O, что $OA = OB = OC$, и разрезают его на треугольники OAB, OAC, OBC. Петя взял треугольник с углами 3°, 88° и 89° и *разломал* его на три треугольника. Потом выбрал один из кусков (тоже остроугольный) и *разломал* его. Так он продолжал до тех пор, пока все треугольники не оказались тупоугольными. Сколько всего треугольников у него получилось?

   Решение.

   Рассмотрим разламывание остроугольного треугольника ABC. Точка O — центр описанной окружности — лежит внутри треугольника, а треугольники AOB, AOC, BOC равнобедренные. Если $\angle BAO = \alpha, \angle CAO = \beta$, то $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha, \angle AOC = 180^\circ - 2\beta$, откуда $BOC = 2\alpha + 2\beta = 2\angle BAC$. Заметим, что для исходного треугольника (с углами $\angle A = 3^\circ, \angle B = 88^\circ, \angle C = 89^\circ$) остроугольным будет только треугольник BOC (при этом он равнобедренный, $\angle BOC = 6^\circ$).



   Далее, если в нём отметить точку O_2, то остроугольным будет треугольник O_2BC ($\angle O_2 = 12^\circ$), а два других — равные и тупоугольные. Далее аналогично будет $\angle O_3 = 24^\circ$, $\angle O_4 = 48^\circ$, $\angle O_5 = 96^\circ$. В этот момент все три новых треугольника окажутся тупоугольными, и процесс прервётся. Таким образом, произошло 5 разламываний. При каждом из них количество треугольников увеличивается на 2, поэтому всего получается 11 треугольников.

3. Натуральное число $n > 5$ называется *новым*, если существует число, не кратное n, но кратное всем натуральным числам, меньшим n. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть новыми?

   Решение. Ответ: 3.

   Пример: число 7 новое (60 кратно числам от 1 до 6, но не кратно 7);
   число 8 новое (420 кратно числам от 1 до 7, но не кратно 8);
   число 9 новое (840 кратно числам от 1 до 8, но не кратно 9).

Оценка: каждое четвёртое число имеет вид $n = 4k + 2 = 2(2k + 1)$; если какое-то число кратно 2 и $2k + 1$, то оно кратно и $2(2k + 1)$, поэтому такое n не может быть новым.

4. Среднее арифметическое нескольких натуральных чисел равно 20,22. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.

Решение. Поскольку 20,22 равно несократимой дроби со знаменателем 50, то количество чисел делится на 50. Однако если все эти $50n$ чисел различны, то их среднее арифметтическое не меньше $25{,}5n$, то есть больше 25.

5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?

Решение. Посмотрим на произвольное число строки x^2. Под ним окажется написано

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{2} = \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}{2} = \frac{2x^2 + 2}{2} = x^2 + 1.$$

Таким образом, каждый раз число увеличивается на единицу. Изначально чисел 2022, и каждый раз их становится на 2 меньше, поэтому операцию проделают 1010 раз, и останутся два центральных числа, увеличенных на 1010: $1011^2 + 1010 = 1023131$ и $1012^2 + 1010 = 1025154$.

Критерии. Доказано в общем виде, что при каждой операции число увеличивается на 1 — 3 балла. Решено верно без грамотного доказательства увеличения на 1 — 4 балла. Ошибка в подсчете остающихся чисел — -2 балла.

6. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).

Б) Так как все ученики разного роста, самый высокий из них заведомо выше своих соседей, поэтому является рыцарем, то есть все лжецами быть не могут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

8. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 30?

Решение. Буква А должна равняться 0. Остальные 6 букв — ненулевые цифры с суммой, кратной 3. Заметим, что каждый остаток от деления на 3 встречается трижды. Перебором находим все наборы остатков, сумма которых кратна трём: 000111, 000222, 111222, 001122. Считаем 6-элементные подмножества цифр: первых трёх типов — по одному, последнего — $3^3 = 27$. Каждое из них можно переставлять $6!$ способами. Итого: $30 \cdot 6! = 21600$.

Критерии. Показано, что «А» равно 0 — 1 балл. Комбинации остальных букв найдены перебором — не снижать, но если потеряны случаи — не более 3 баллов. Ошибка в вычислениях — -1 балл. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — так же -1 балл.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

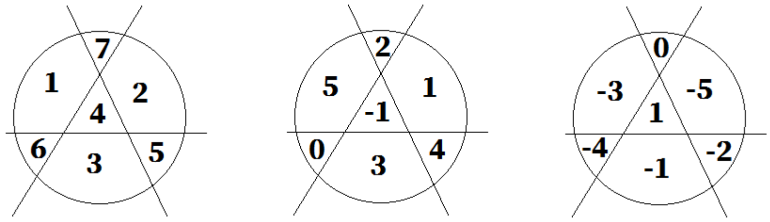
Problems for grade R8

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

---

1. A circle is divided into 7 parts by 3 lines. Maria wants to write 7 consecutive integers into these parts (one number in each part) so that the sum of numbers on one side of each line is equal to the sum of numbers on the other side. Find 3 ways to do it which differ with sets of numbers used.

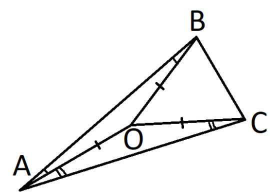
   Solution. Several (not all) examples:



2. *Breaking* of an acute triangle ABC is the operation when a point O such that $OA = OB = OC$ is chosen inside the triangle, and it is cut into triangles OAB, OAC, OBC. Peter took a triangle with angles 3°, 88° and 89° and *broke* it into three triangles. Then he chose one of the pieces (also acute) and *broke* it. So he continued until all the triangles were obtuse. How many triangles did he get in total?

   Solution. The acute angle of an acute-angled triangle doubles each time: after the first cut it is 6°, after the second 12°, then 24°, 48°, 96°. The remaining triangles are always obtuse. So we make 5 breaks, thus there are $1 + 2 \cdot 5 = 11$ triangles in total.

   Consider a breaking of an acute-angled triangle ABC. O is the center of its circumcircle, so it lies inside the triangle, and the triangles AOB, AOC, BOC are isosceles. If $\angle BAO = \alpha, \angle CAO = \beta$, then $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha, \angle AOC = 180^\circ - 2\beta$, whence $BOC = 2\alpha + 2\beta = 2\angle BAC$. For the initial triangle (with angles $\angle A = 3^\circ, \angle B = 88^\circ, \angle C = 89^\circ$), only $\triangle BOC$ is acute (moreover, it is isosceles, $\angle BOC = 6^\circ$).



   Further, if we mark a point O_2 in it, then the triangle O_2BC is acute ($\angle O_2 = 12^\circ$), and the other two triangles are equal and obtuse. Analogously, $\angle O_3 = 24^\circ$, $\angle O_4 = 48^\circ$, $\angle O_5 = 96^\circ$. At this point, all three new triangles are obtuse and the process stops. Thus there were 5 breakings. Each breaking increases the number of triangles by 2, so there are 11 triangles in total.

3. Let us call a positive integer $n > 5$ *new* if there exists an integer which is divisible by all the numbers $1, 2, \ldots, n-1$ but not by n. What is the maximal number of consecutive new integers?

   Answer: 3.

   Solution. Example: number 7 is new (60 is divisible by all the numbers from 1 to 6 but not by 7);

number 8 is new (420 is divisible by all the numbers from 1 to 7 but not by 8);
number 9 is new (840 is divisible by all the numbers from 1 to 8 but not by 9).

Estimation: each fourth number if of type $n = 4k + 2 = 2(2k + 1)$; if a number is divisible by 2 and $2k + 1$, it is also divisible by n, so it cannot be new.

4. The arithmetic mean of several positive integers equals to 20.22. Prove that at least two of the numbers are equal.

   Solution. Since 20.22 is equal to an irreducible fraction with denominator 50, the number of the integers is divisible by 50. However if all 50 numbers are different, then the arithmetic mean of $50n$ distinct natural numbers is at least $25.5n$, thus more than 25.

5. The squares of the first 2022 natural numbers are written in a row: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. For each written number, except for the first and the last ones, the arithmetic mean of its left and right neighbors was calculated and written under it (for example, $\frac{1+9}{2} = 5$ was written under the number 4). For the resulting string of 2020 numbers, we did the same. So we continued until we reached a line in which there are only two numbers. Find these numbers.

   Solution. Let's take a look at one of the numbers x^2. Under it

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{2} = \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}{2} = \frac{2x^2 + 2}{2} = x^2 + 1$$

   will be written, so each time numbers increase by one. Initially, there are 2022 numbers and each time 2 of them disappears, so there will be 1011 lines of numbers, and in the very last line there will be two central numbers increased by 1010: $1011^2 + 1010 = 1023131$ and $1012^2 + 1010 = 1025154$.

   Criteria. It is proved generally that each time every number increases by 1 — 3 points. If the problem is solved correctly without a competent proof of the increment — 4 points. Any mistake in counting the remaining numbers — -2 points.

6. Four cars A, B, C and D start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C and D — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race A meets C for the first time, and at the same moment B meets D for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of C and D?

   Solution. If A meets C and B meets D every 7 minutes, then their convergence speeds are equal: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Therefore, the removal speeds of A with B and C with D are equal: $V_A - V_B = V_D - V_C$. So, since A meets B for the first time at the 53^{rd} minute, then C and D will meet for the first time at the same moment.

   Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If it is stated that any of cars' speeds are equal — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.

7. A school was opened on the island of knights and liars (a knight always tells the truth, a liar always lies). All $2N$ students are of different heights. They lined up in pairs one after another (in other words, in two equal columns). The two people standing first said: "I am taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person behind me". The last two said: "I am also taller than 2 people: my neighbor in a pair and the person in front of me". Finally, everyone else said: "I am taller than 3 people: my neighbor in a pair, the person in front of me and the person behind me".
   a) Find the largest possible number of knights among the students.
   b) Is it possible for all the students to be liars?

Solution. A) There is no more than one knight in each pair, so there are no more than N knights (this amount can be achieved by placing N higher students in chess order).
B) No. All the students are of the different heights, so the heighest of them is always a knight.

Criteria. Problem a) is fully solved — 5 points. If only one part of the solution is given (either an estimation or an example) — 2 points. One or few examples are given as a proof — 0 points. Problem b) is fully solved — 2 points.

8. Kate wrote a number divisible by 30 on the board and encrypted it according to the rules of alphametic puzzles (different letters correspond to different digits, the same letters — the same digits). She got the word "GUATEMALA". How many different numbers could Kate write on the board?

Solution. The letter A should be equal 0. The other 6 letters are non-null digits whose sum is divisible by 3. Note that each remainder modulo 3 occurs 3 times. Checking all possible sets of remainders we conclude that the combinations whose sum is divisible by 3 are 000111, 000222, 111222, 001122. Now count 6-element subsets of $\{1, 2, \ldots, 9\}$ for each combination: there is only 1 set for each of the first three combinations and $3^3 = 27$ sets for the last one. Each subset of digits can be rearranged in 6! ways, so the answer is $30 \cdot 6! = 21600$.

Criteria. 1 point if it is shown that $A = 0$. If combinations of the remaining letters are found by brute force — it is OK, but if some cases are lost — no more than 3 points. -1 point in case of calculation error(s) or if the answer is an expression which is not counted.

8. A park has a shape of a 10×10 cells square. A street light can be placed in any cell (but no more than one light in each cell).
a) A park is called *illuminated* if, no matter in which cell a visitor stands, there exists a square of 9 cells containing the visitor and a light. What minimal number of lights is required to illuminate the park?
b) A park is called *securely illuminated* if it remains illuminated even when one arbitrary street light is broken. What is the minimal number of lights in a securely illuminated park?

Solution. a) 4. Let's divide the park into 4 quarters (5×5 squares), then each quarter contains at least one light (otherwise e. g. the corner is not illuminated). Placing a light in the center of each quarter, we get an example.

b) 10.

Estimation. Each 3×3 corner square must contain at least two lights (to illuminate the corner cell). Let us temporarily leave only these 8 lights. Each of them illuminates only within its quarter, and if a light in the center of a quarter is broken (or if it doesn't exist), then there is a "dark" five-cell strip along the border of this quarter. Note that the union of two such strips for opposite quarters in any case cannot be illuminated with one light, so we need at least two more lights.

An example:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Criteria. Part (a) costs 2 points (1 for the example an 1 for an estimation). In the part (b), 2 points are given for an example and 3 points for an estimation (1 point of them for a that 8 lights are not enough).