Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

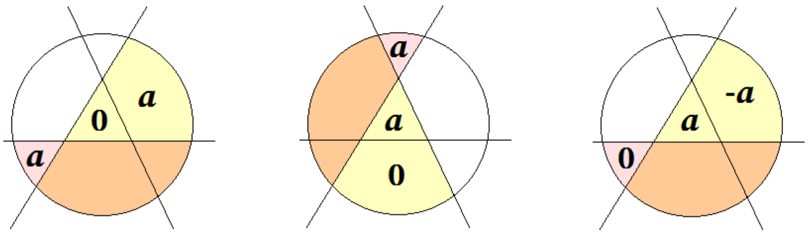
---

1. Есть ли в XXI веке такой год, номер которого можно представить в виде $\dfrac{a+b\cdot c\cdot d\cdot e}{f+g\cdot h\cdot i\cdot j}$, где $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ — попарно различные цифры?

   Решение. Да, например, $2022=\dfrac{6+4\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1+0\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$. Аналогично можно представить 2018, 2020 и 2021.

2. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.

   Решение. Разберём три случая расположения нуля (по картинке на каждый случай). На картинках сумма жёлтых секторов равна сумме розовых (поскольку жёлтые + оранжевые = розовые + оранжевые = полусумма всех чисел). Видим, что первые два случая вообще невозможны (есть совпадающие числа), а в третьем случае одно из чисел a и $-a$ отрицательно.



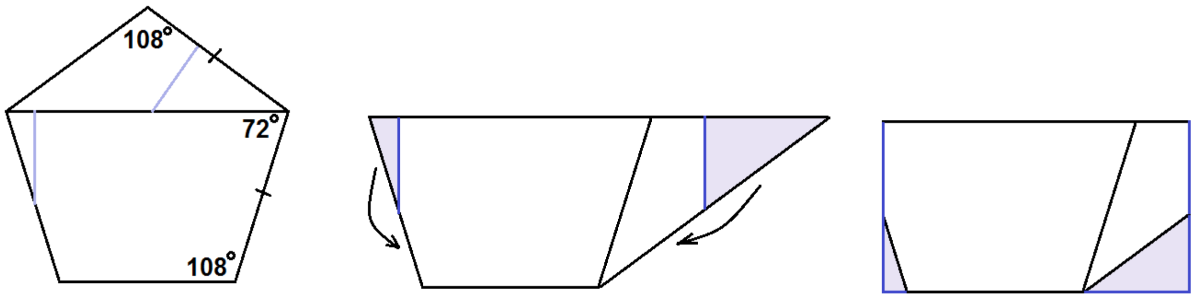
   Критерии. Если разобраны не все случаи, то даётся не больше 2 баллов.

3. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Первые несколько партий чемпионата прошли с соблюдением регламента. Всегда ли можно завершить чемпионат, соблюдая регламент?

   Решение. Не всегда. Например, пусть в чемпионате 6 игроков, и первые партии проводились в таком порядке: 12, 34, 56, 13, 24. Теперь наименьшее число партий сыграли 5 и 6, поэтому надо бы провести матч между ними, но он уже состоялся.

4. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

   Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).



5. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

   Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

   Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

   Решение. Перепишем уравнение в виде $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. В силу симметрии достаточно найти все решения с $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, то есть $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ и $a \in \{1,2,3\}$. В случае $a = 1$ выполнено неравенство $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть решений нет. Если $a = 2$, то $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1)^{-1} < 7$. В этом случае имеется 3 решения $(a,b,c) = (2,4,15), (2,5,9), (2,6,7)$ (при $b = 2$ и $b = 3$ уравнение на c не имеет решений в натуральных числах). Наконец, если $a = 3$, то $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)^{-1} < 5$. Это даёт ещё 2 решения $(a,b,c) = (3,3,8), (3,4,5)$. С учётом перестановок всего имеется 27 решений.

   Критерии. Если найдена только часть решений, то даётся не больше 2 баллов.

7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.

   Решение. Числа 9875213 и 9875214 полезны. Докажем, что бóльших последовательных полезных чисел не существует. У последовательных чисел и суммы цифр последовательны (иначе имеем переход через разряд, то есть 0 на конце). Но тогда максимальные возможные суммы цифр — 35 и 36 (среди любых двух бóльших сумм хотя бы одна имеет простой делитель, больший 9, или превосходит $1+\ldots+9 = 45$). Последовательные полезные числа не более чем семизначные, иначе суммы их цифр будут не меньше $1+\ldots+8 = 36$ у каждого. Последовательных полезных чисел вида $9876***$ не бывает, так как у таких чисел суммы цифр не меньше $9+8+7+6+1+2+3 = 36$. А последовательные полезные числа вида $9875***$ могут отличаться от найденных только перестановкой последних цифр (иначе суммы их цифр больше 36), так что найденные числа действительно наибольшие.

   Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

8. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.
б) 10.
Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

International Mathematical Olympiad
«Formula of Unity» / «The Third Millennium»
Year 2022/2023. Qualifying round

Problems for grade R9

Each task is assessed at 7 points. Some problems have their own criteria (printed in gray).

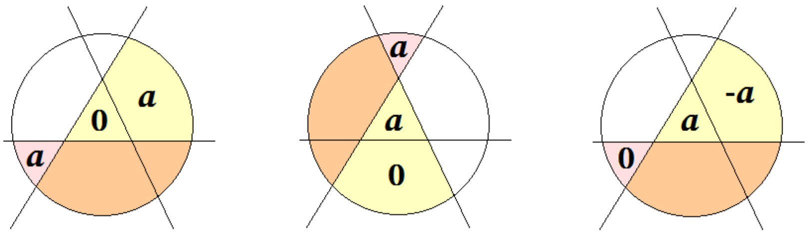
---

1. Is there a year in the 21st century whose number can be represented as $\dfrac{a+b\cdot c\cdot d\cdot e}{f+g\cdot h\cdot i\cdot j}$ where $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ are the digits 0 to 9 in any order?

   Solution. Yes, for example, $2022 = \dfrac{6+4\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1+0\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$. There are analogous examples for 2018, 2020, 2021.

2. A circle is divided into 7 parts by 3 lines. Maria wrote 7 different integers into these parts (one number in each part) so that the sum of numbers on one side of each line is equal to the sum of numbers on the other side. One of the numbers is 0. Prove that some other number is negative.

   Solution. Let's analyze three cases of zero location. On the pictures, the sum of the yellow sectors is equal to the sum of the pink ones (because yellow + orange = pink + orange = half the sum of all numbers). We see that the first two cases are impossible (because some numbers are equal), and in the third case one of the numbers a and $-a$ is negative.



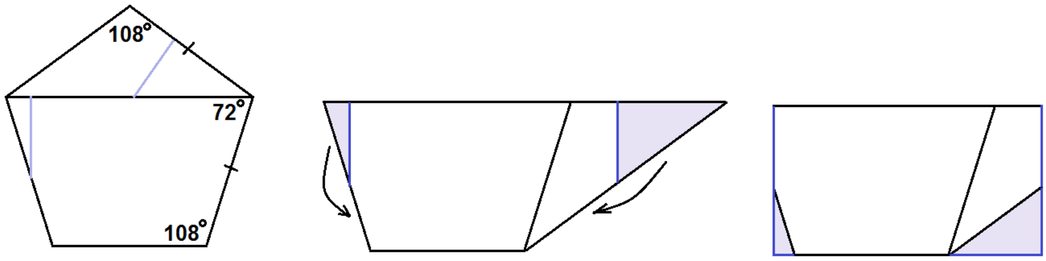
   Criteria. Not more than 2 points if not all the cases are considered.

3. A chess championship is held in a village club: each participant must play one game with each other. There is only one board in the club, so two games cannot be played at the same time. According to the rules of the championship, at any moment the number of games already played by different participants must differ by no more than 1. First several games of the championship were played in accordance with the rules. Is it always possible to complete the championship, following the rules?

   Solution. No, not always. For example, let there be 6 players in the championship, and the first games were played in the following order: 12, 34, 56, 13, 24. Now the least number of games were played by 5 and 6, so we should have a match between them, but it has already taken place.

4. Prove that it is possible to cut a regular pentagon into 4 parts and rearrange them to make a rectangle without gaps and overlays.

   Solution. By cutting off and shifting the triangle we obtain a trapezoid (this follows from the angles marked on the picture and the equality of the sides). Next, cutting off two right triangles from the trapezoid, we rotate them and get a rectangle (see figure).



5. Four cars A, B, C and D start simultaneously from the same point of a circular track. A and B travel clockwise, while C and D — counter-clockwise. All cars move at constant (but pairwise different) speeds. After exactly 7 minutes of the race A meets C for the first time, and at the same moment B meets D for the first time. 46 minutes later, A and B meet for the first time. How long does it take from the start to the first meeting of C and D?

   Solution. If A meets C and B meets D every 7 minutes, then their convergence speeds are equal: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Therefore, the removal speeds of A with B and C with D are equal: $V_A - V_B = V_D - V_C$. So, since A meets B for the first time at the 53^{rd} minute, then C and D will meet for the first time at the same moment.

   Criteria. 46 minutes are used in calculations instead of 53 — 3 points. If it is stated that any of cars' speeds are equal — 1 point. Only the answer is given without any explanation — 0 points.

6. How many solutions in positive integers the equation $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$ has?

   Solution. Let's rewrite the equation as $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. By symmetry, it suffices to find all solutions with $a \leqslant b \leqslant c$. Then $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, i.e. $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ and $a \in \{1,2,3\}$. In the case $a = 1$ the inequality $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$ is satisfied, i.e. there are no solutions. If $a = 2$ then $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, i.e. $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)^{-1} < 7$. In this case, there are 3 solutions $(a,b,c) = (2,4,15), (2,5,9), (2,6,7)$ (for $b = 2$ and $b = 3$ the equation on c has no solutions in natural numbers). Finally, if $a = 3$, then $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, i.e. $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}}-1)^{-1} < 5$. This gives 2 more solutions $(a,b,c) = (3,3,8), (3,4,5)$. Including permutations, there are 27 solutions in total.

   Criteria. Not more than 2 points if only a part of the solutions is found.

7. Let us call a positive integer *useful* if its decimal notation contains neither zeroes nor equal digits, and if the product of all its digits is divisible by the sum of these digits. Find two maximal consecutive (i. e. differing by 1) useful numbers.

   Answer: 9875213 and 9875214.

   Solution. These two numbers satisfy all conditions. Let us prove that they are maximal. For consecutive numbers, the sums of digits are consecutive (otherwise we have a transition through the digit, that is, 0 at the end). But then the maximum possible sums of digits are 35 and 36 (among any two larger ones, from 37 to $45 = 1+\ldots+9$, at least one has a prime divisor greater than 9). Consecutive useful numbers have no more than seven digits, otherwise the sum of their digits will be at least $1+\ldots+8 = 36$ each. There are no consecutive useful numbers of the form $9876***$, since the sum of digits of such numbers is at least $9+8+7+6+1+2+3 = 36$. And consecutive useful numbers of the form $9875***$ can differ from those found only by permutation of the last digits (otherwise the sum of their digits is greater than 36), so the numbers we found are really the largest.

   Criteria. 2 points for the answer and 5 points for an estimation.