Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Даша выложила в ряд n карточек ($5 \leqslant n \leqslant 100$), на которых по порядку написаны натуральные числа от 1 до n. После этого она перевернула две карточки чистой стороной вверх так, что произведение чисел между ними оказалось равным произведению всех остальных видимых чисел. Какому же числу равно каждое из этих произведений?
Примечание. Слева или справа от перевёрнутых карточек может не оказаться ни одного числа. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Заметим, что если на какой-то карточке встречается простое число $p > \frac{n}{2}$, то её надо перевернуть, поскольку иначе это число попадёт в одно из произведений, а во втором произведении множителя p не будет. Если таких числа хотя бы три, то придётся перевернуть три карточки, что противоречит условию. Если же их два, то обязательно надо перевернуть именно эти две карточки.

Поэтому большинство значений n можно отвергнуть:
если $61 \leqslant n \leqslant 100$, то надо перевернуть карточки 53, 59, 61;
если $41 \leqslant n \leqslant 60$, то надо перевернуть карточки 31, 37, 41;
если $31 \leqslant n \leqslant 40$, то надо перевернуть карточки 23, 29, 31;
если $19 \leqslant n \leqslant 30$, то надо перевернуть карточки 17 и 19, но между ними лишь число 18, что меньше, чем $16!$;
если $13 \leqslant n \leqslant 18$, то надо перевернуть карточки 11 и 13, но между ними лишь число 12, что меньше, чем $10!$.

Далее, при $n = 11$ и $n = 12$ нужно перевернуть карточки 7 и 11. Заметим, что $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ и $6! = 720$, поэтому при $n = 11$ условие выполняется (и произведение равно 720), а при $n = 12$ не выполняется ($6! \cdot 12 \neq 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$).

Если $n = 10$, то одна из перевёрнутых карточек — 7. Пусть число на второй карточке равно a. Заметим, что если $a = 1$, то каждое из произведений вновь равно 720 (это второй подходящий вариант, но ответ тот же). Если $2 \leqslant a \leqslant 6$, то «внутреннее» произведение меньше 720, а «внешнее» не меньше 720; то же верно и в случае, когда $a > 7$.

Разберём оставшиеся значения n. Если n равно 7, 8 или 9, то надо перевернуть карточки 5 и 7, но между ними число 6, а «внешнее» произведение не меньше $4!$. Если $n = 5$, то перевёрнуты карточки 3 и 5, но $4 \neq 1 \cdot 2$. Наконец, если $n = 6$, то одним из перевёрнутых чисел будет 5. Второе перевёрнутое число может быть только 1 или 2 (иначе «внешнее» произведение делится на 3, а внутреннее — нет), но $1 \cdot 6 < 3 \cdot 4$ и тем более $6 < 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Ответ: 720.

Критерии. Каждый из двух примеров оценивается в 1 балл. За идею с несколькими простыми числами между $n/2$ и n даётся 2 балла. За в целом верное решение с опущенными переборами снимается от 1 до 3 баллов.

2. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Выделим в $f(x)$ полный квадрат: $f(x) = (x+5)^2 - 5$. Тогда

$$f(f(x)) = \Big(\big((x+5)^2 - 5\big) + 5\Big)^2 - 5 = (x+5)^4 - 5.$$

Аналогично,

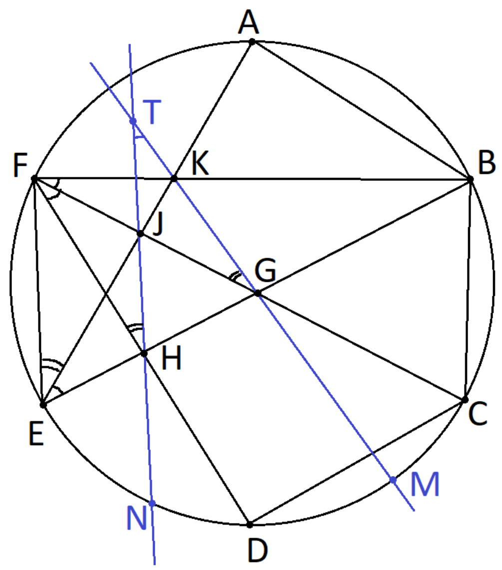
$$\underbrace{f(f(\ldots f(f(x))\ldots))}_{n\ \text{функций}} = (x+5)^{2^n} - 5,$$

то есть при $n = 3$ получится уравнение $(x+5)^8 - 5 = 0$, откуда $x = -5 \pm \sqrt[8]{5}$.

Критерии. Если в ответе есть посторонние корни (в частности, комплексные корни, записанные в виде $\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm 5}}}$ или подобном), то ставится не больше 5 баллов.

3. На окружности ω отмечены точки A, B, C, D, E, F (в указанном порядке), причём $AB = BC = CD$. Прямая BE пересекает прямые CF и DF в точках G и H соответственно, а прямая AE пересекает прямые CF и BF в точках J и K соответственно. Лучи KG и JH пересекают окружность ω в точках M и N, расстояние между которыми равно AB. Докажите, что прямые GK и JH пересекаются на ω. (*О. А. Пяйве*)

Решение. Углы AEB, BFC, CFD равны, поскольку опираются на равные дуги. Из равенства $\angle AEB = \angle BFC$ следует, что четырёхугольник $EFKG$ вписанный, поэтому $\angle FGK = \angle FEK$. А из равенства $\angle AEB = \angle CFD$ следует, что четырёхугольник $EFJH$ вписанный, поэтому $\angle FEK = \angle FHK$. Получаем $\angle FGK = \angle FHK$, отсюда $FHGT$ вписанный (T — точка пересечения HJ и GK). Значит, $\angle T = \angle CFD$. Но, по условию, высекаемые этими углами дуги MN и CD также равны, а это значит, что T лежит на окружности.



4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (16-y)^2} + \sqrt{y^2 + (30-z)^2} + \sqrt{z^2 + (16-t)^2} + \sqrt{t^2 + (30-x)^2},$$

где x, y, z, t — произвольные вещественные числа. (*С. П. Павлов*)

Решение. Стартуя в начале координат, последовательно отложим векторы $(x, 16-y)$, $(30-z, y)$, $(z, 16-t)$, $(30-x, t)$. Заметим, что сумма этих векторов равна $(60, 32)$, то есть имеет длину $\sqrt{60^2 + 32^2} = 68$. В то же время искомое выражение равно сумме длин векторов, поэтому оно не меньше 68 (причём равенство достигается, если все векторы коллинеарны, например, при $x = z = 15, y = t = 8$).

Ответ: 68.

Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

5. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При

этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 32.

Решение. Общее число марок не меньше $28 + 29 + \ldots + 36$ (см. задачу 9.5), к тому же кратно 7 и 8, а потому не меньше $336 = 28 + 35 + 36 + \ldots + 42$. Если в этой сумме заменить $28 + 35$ на $31 + 32$, то получим пример к ответу 32.

Предположим теперь, что в синем альбоме 31 марка или меньше. Тогда в красном не более 30 марок. В то же время общее количество марок равно $8a$, где $a \geqslant 42$. После расформирования красного альбома в остальных нужно сделать ровно по a марок. Значит, изначально в каждом альбоме не более a марок. В синий альбом придётся добавить не менее $42 - 31 = 11$ марок, а в остальные суммарно не менее чем $6+5+4+3+2+1+0 = 21$ марку. Однако в сумме это не менее 32 марок, а в красном альбоме лишь 30.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, оценка — в 4 балла. За оценку на количество марок в красном альбоме ставится 2 балла.

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.