Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Функции f и g заданы формулами $f(x) = ax + b$, $g(x) = bx + a$, где a и b — некоторые натуральные числа, причём $f(g(x)) - g(f(x)) = 2024$. Чему могут быть равны числа a и b? (*С. П. Павлов*)

Решение. Условие равносильно выполнению равенства $a(bx+a)+b-(b(ax+b)+a) = 2024$, т. е. такому: $a^2+b-b^2-a = 2024$, или $(a-b)(a+b-1) = 2024$. Поскольку $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, и значения выражений $a-b$ и $a+b-1$ разной чётности, второе из них положительно и больше первого, то остаётся рассмотреть только четыре варианта:

$a-b$	1	8	11	23
$a+b-1$	2024	253	184	88

Соответствующие пары значений (a, b) таковы: (1013; 1012), (131; 123), (98; 87), (56; 33).

Критерии. В случае неполного перебора ставится не больше 5 баллов.

2. Лес представляет собой координатную плоскость, в некоторых узлах которой растут ёлки. Всего ёлок больше миллиона. Докажите, что можно срубить более 100 000 ёлок так, чтобы расстояние между любыми двумя срубленными ёлками было больше 3. (Узлом называется точка, обе координаты которой целые; ёлки считаем точками.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Раскрасим узлы в 10 цветов так, чтобы узлы одного цвета образовывали сетку из квадратов со стороной $\sqrt{10}$. Например, пусть цвет узла с координатами (x, y) определяется остатком от деления числа $x + 3y$ на 10 (соответствующая раскраска для наглядности показана справа, если считать, что деревья растут в центрах квадратов).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

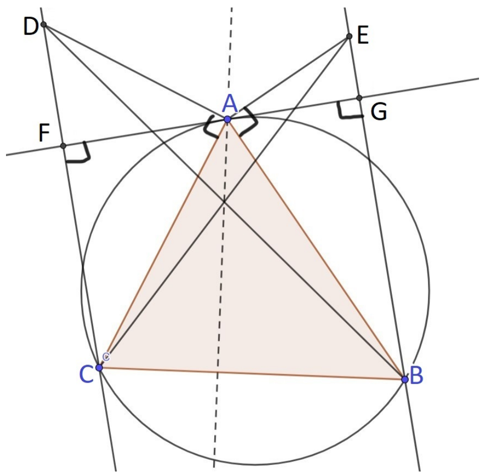
По принципу Дирихле, в какой-то из десяти цветов окрасились более 100 тысяч ёлок. Тогда все эти ёлки можно срубить, поскольку расстояние между любыми двумя из них не меньше $\sqrt{10}$.

Критерии. Приведено верное решение, но только для случая, когда ёлки растут вплотную (в каждом узле некой области) — 5 баллов.

3. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке A. Точки D и E таковы, что CD и BE перпендикулярны ℓ, а углы DAC и EAB прямые. Докажите, что BD и CE пересекаются на высоте треугольника ABC из вершины A.

(*Ю. Э. Нагуманов*)

Решение. Докажем, что $BADH$ — параллелограмм, где H — ортоцентр ABC. AD перпендикулярно AC и BH перпендикулярно AC, значит $AD \parallel BH$. Пусть касательная в точке A пересекает CD в точке F. $\angle FAC = \angle ABC$ как угол между касательной и хордой. $\angle CDA = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - (90^\circ - \angle FAC) = \angle FAC = \angle ABC$. Значит, точки C, D, A, H лежат на одной окружности. Значит, $\angle DHC$ — прямой, а значит $DH \parallel AB$. Тогда $BADH$ — параллелограмм, а значит BD проходит через середину AH. Аналогично CE тоже через неё проходит, ч.т.д.



4. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме?

(*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 32.

Решение. Общее число марок не меньше $28 + 29 + \ldots + 36$ (см. задачу 9.5), к тому же кратно 7 и 8, а потому не меньше $336 = 28 + 35 + 36 + \ldots + 42$. Если в этой сумме заменить $28 + 35$ на $31 + 32$, то получим пример к ответу 32.

Предположим теперь, что в синем альбоме 31 марка или меньше. Тогда в красном не более 30 марок. В то же время общее количество марок равно $8a$, где $a \geqslant 42$. После расформирования красного альбома в остальных нужно сделать ровно по a марок. Значит, изначально в каждом альбоме не более a марок. В синий альбом придётся добавить не менее $42 - 31 = 11$ марок, а в остальные суммарно не менее чем $6+5+4+3+2+1+0 = 21$ марку. Однако в сумме это не менее 32 марок, а в красном альбоме лишь 30.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, оценка — в 4 балла. За оценку на количество марок в красном альбоме ставится 2 балла.

5. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать?

(*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.

6. Докажите, что уравнение $\dfrac{5m^2-n}{n^2+3m}=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

(А. Р. Араб)

Решение. Решим сначала уравнение $5m^2-n=n^2+3m$, то есть $5m^2-3m=n^2+n$. Умножим его на 4 и прибавим 1 к обеим частям, чтобы выделить полный квадрат справа: $20m^2-12m+1=(2n+1)^2$. Теперь домножим обе части на 5 и выделим полный квадрат слева: $(10m-3)^2=5(2n+1)^2+4$. Сделаем замену $x=10m-3$, $y=2n+1$. У получившегося уравнения $x^2-5y^2=4$ имеются решения $x=\pm(F_{2k-1}+F_{2k+1})$, $y=\pm F_{2k}$, $k\geqslant 0$, где F_k — числа Фибоначчи (мы пользуемся нумерацией $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$ при всех целых k). На самом деле $(F_{k-1}+F_{k+1})^2-5F_k^2=4F_{k-1}^2+4F_{k-1}F_k-4F_k^2$ равно $(-1)^k4$ для всех k, что легко проверить по индукции: при $k=0$ это выполняется, а если $F_{k-1}^2+F_{k-1}F_k-F_k^2=(-1)^k$, то и $F_k^2+F_kF_{k+1}-F_{k+1}^2=F_k^2-F_{k-1}F_k-F_{k-1}^2=(-1)^{k+1}$. (Можно доказать с помощью теории уравнений Пелля, что $x^2-5y^2=4$ не имеет других решений.)

Теперь нужно найти бесконечно много x и y таких, для которых соответствующие $m=\frac{x+3}{10}$ и $n=\frac{y-1}{2}$ целые. Заметим, что последовательность остатков чисел Фибоначчи по модулю 10 периодична (так как пара (F_{k-1},F_k) может принимать конечное количество вариантов по модулю 10, а остаток следующего и предыдущего чисел Фибоначчи однозначно определяются по остаткам этой пары). Кроме того, $x=F_2=1$ и $y=F_1+F_3=3$ подходят, они соответствуют тривиальному решению $m=n=0$. Значит, уравнение $5m^2-n=n^2+3m$ имеет бесконечно много решений.

Осталось понять, что они все не могут обнулять знаменатель. Действительно, если (m,n) — решение уравнения $5m^2-n=n^2+3m$, при котором $n^2+3m=0$, то и $5m^2-n=0$. Следовательно, $25m^4+3m=0$. Так как m целое, то обязательно $m=0$ (иначе $|25m^4|>|3m|$), а значит, и $n=0$. Остальные пары (m,n) нам подходят.

Критерии. Если найдено бесконечно много решений уравнения $5m^2-n=n^2+3m$, но не доказано, что бесконечно много из них не обнуляют знаменатель, то ставится 6 баллов. За нахождение бесконечного количества решений в рациональных числах с ограниченным знаменателем (например, целых решений уравнения $x^2-5y^2=4$) даётся 4 балла.