Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. В каждом ли году календари на какие-то два месяца полностью совпадают (иными словами, какие-то два месяца имеют одинаковую длину и начинаются в один и тот же день недели)? (*П. Д. Муленко*)

Примечание. Ниже приведена справочная таблица месяцев года с количеством дней:

1. Январь	31	5. Май	31	9. Сентябрь	30
2. Февраль	28 (29)	6. Июнь	30	10. Октябрь	31
3. Март	31	7. Июль	31	11. Ноябрь	30
4. Апрель	30	8. Август	31	12. Декабрь	31

Ответ: Да. В невисокосный год совпадают январь с октябрём, а в високосный — январь с июлем.

Решение. Действительно, в невисокосный год количество дней в первых 9 месяцах равно $365 - 31 - 30 - 31 = 273$. Оно делится на 7, поэтому 1 октября — тот же день недели, что и первое января. Продолжительность января и октября также совпадает. В високосный год продолжительность первых шести месяцев $(31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182)$ делится на 7, и продолжительность января и июля также совпадает.

Критерии. Только ответ "Да" – 0 баллов.

Только ответ с указанием конкретных месяцев – 2 балла.

Показано, что описанная ситуация может иметь место в обычном году, либо в високосном году (но не в обоих) — 2 балла.

Задача решена в предположении, что год начинается с понедельника — 5 баллов.

2. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 4 сундука, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки с золотом, а какие — мимики. (*П. Д. Муленко*)

В правом столбце есть хотя бы один мимик	*Подо мной прячется мимик*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди моих соседей по стороне есть хотя бы один мимик*

Ответ: Правый верхний — единственный мимик

Решение. Если правый нижний сундук — мимик, то его соседи с золотом, а тогда левый верхний должен быть мимиком, но на нём написана правда. Если же правый нижний с золотом, то тогда правый верхний — мимик, и оба левых с золотом.

Критерии. Верный ответ без обоснований – 2 балла;
верно и обоснованно определён вид хотя бы одного из сундуков – 3 балла.

3. У Марины есть серебристые, терракотовые и пурпурные карточки с числами от 1 до 50: на серебристых записаны все числа, кратные 7; на терракотовых — кратные 3; на пурпурных — кратные 5. Егор выбирает по одной карточке всех цветов, выкладывая их в указанном порядке, и составляет из них новое число (например, серебристая карточка 14, терракотовая 6 и пурпурная 25 дадут число 14625). Сколько чисел, кратных 3, Егор сможет получить? (*Л. С. Корешкова*)

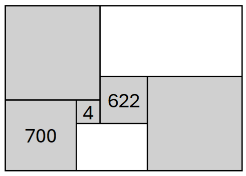
Решение. Число делится на 3, если его сумма цифр делится на 3. Классифицируем числа по остаткам от деления их суммы цифр (или, что то же самое, их самих) на 3.

	серебристые	терракотовые	пурпурные
остаток 1	7, 28, 49	-	10, 25, 40
остаток 2	14, 35	-	5, 20, 35, 50
остаток 0	21, 42	(16 чисел: 3, ..., 48)	15, 30, 45

Терракотовые карточки делятся на 3 сами по себе, значит, надо сочетать серебристые и пурпурные так: или обе делятся на 3, или одна даёт остаток 1, а другая остаток 2. Всего получается $16 \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = 384$ варианта.

Критерии. Сформулирован и верно использован признак делимости на 3 — 2 балла.

4. Прямоугольник разрезали на белые прямоугольники и серые квадраты, как показано на рисунке, после чего вычислили периметры трёх получившихся частей (указаны внутри). Найдите периметр исходного прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)



Решение. Все три части, в которых вычислили периметры — квадраты, поэтому их стороны равны 175, 1 и 155,5, соответственно. Тогда сторона левого верхнего квадрата равна $175 + 1 = 176$, а правого нижнего — $175 + 155{,}5 - 1 = 329{,}5$. Тогда левая сторона исходного прямоугольника равна $176 + 175 = 351$, а нижняя — $176 + 155{,}5 + 329{,}5 = 661$, то есть периметр равен $2 \cdot (351 + 661) = 2024$.

Критерии. Каждая арифметическая ошибка – -1 балл.
Каждая ошибка другого рода (пропущена одна из сторон при суммировании, периметр делится на 2 вместо 4, найдена площадь вместо периметра и др.) при верном плане решения — -2 балла.

5. Даша выложила в ряд несколько карточек, на которых по порядку написаны натуральные числа, начиная с 1. Теперь она хочет перевернуть две карточки чистой стороной вверх так, чтобы произведение чисел между ними равнялось произведению всех остальных видимых чисел. Может ли она так сделать, если карточек (А) 11; (Б) 12?
Примечание. Слева или справа от перевёрнутых карточек может не оказаться ни одного числа. (*П. Д. Муленко*)

Решение. А) Могло, если Даша перевернула карточки 7 и 11 — тогда произведения равны $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Б) Не могло. Среди карточек есть простые числа 7 и 11, которые, попав в одно из прозведений, не дадут им быть равными, так как больше нет чисел, кратных 7 или 11. Но, если перевернуть обе карточки, произведения не будут равными: между будет $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$, а «по краям» — $6! \cdot 12 = 8640$.

Критерии.

А) Максимум 2 балла (достаточно просто указать, что перевёрнуты числа 7 и 11). Просто ответ «да» без указания перевернутых карточек — 0 баллов.

Б) Максимум 5 баллов. Ответ без доказательства — 0 баллов.

6. На конференцию по математике в отель заселились 120 человек. В первый вечер они все распределились между четырьмя локациями: стойкой регистрации, баром, столовой и конференц-залом. Число посетителей бара составляет пятую часть от количества людей в столовой; а на стойке регистрации в восемь раз меньше людей, чем в конференц-зале. Когда в какой-то момент десять учёных перешли из столовой в конференц-зал, а шестеро из бара подошли к стойке регистрации, то у стойки регистрации стало в шесть раз меньше людей, чем в столовой. Сколько человек первоначально находилось в каждой локации гостиницы? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Пусть изначально в баре было x человек, тогда в столовой $5x$, на стойке регистрации $(120 - 6x) : 9$, в конференц-зале $8 \cdot (120 - 6x) : 9$. Когда люди перешли, на стойке регистрации стало на 6 человек больше, а в столовой на 10 меньше. Получаем уравнение $6 \cdot \left(\frac{120-6x}{9} + 6\right) = 5x - 10$, из которого $x = 14$, то есть в баре было 14 человек, в столовой — 70, на регистрации — 4, и в конференц-зале — 32 человека.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.