Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. В каждом ли году календари на какие-то два месяца полностью совпадают (иными словами, какие-то два месяца имеют одинаковую длину и начинаются в один и тот же день недели)? (*П. Д. Муленко*)

Примечание. Ниже приведена справочная таблица месяцев года с количеством дней:

1. Январь	31	5. Май	31	9. Сентябрь	30
2. Февраль	28 (29)	6. Июнь	30	10. Октябрь	31
3. Март	31	7. Июль	31	11. Ноябрь	30
4. Апрель	30	8. Август	31	12. Декабрь	31

Ответ: Да. В невисокосный год совпадают январь с октябрём, а в високосный — январь с июлем.

Решение. Действительно, в невисокосный год количество дней в первых 9 месяцах равно $365 - 31 - 30 - 31 = 273$. Оно делится на 7, поэтому 1 октября — тот же день недели, что и первое января. Продолжительность января и октября также совпадает. В високосный год продолжительность первых шести месяцев $(31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182)$ делится на 7, и продолжительность января и июля также совпадает.

Критерии. Только ответ "Да" – 0 баллов.

Только ответ с указанием конкретных месяцев – 2 балла.

Показано, что описанная ситуация может иметь место в обычном году, либо в високосном году (но не в обоих) — 2 балла.

Задача решена в предположении, что год начинается с понедельника — 5 баллов.

2. Найдите все числа, образованные цифрами от 1 до 9 (каждая цифра встречается по одному разу), в которых сумма первых двух цифр делится на 2, сумма второй и третьей цифр делится на 3, и так далее (соответственно, сумма восьмой и девятой цифр делится на 9). (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Решение. Первые 8 цифр образуют 4 пары одинаковой чётности, поэтому последняя цифра точно нечётная. Переберём все варианты с учётом условия (в каждой строке указана последняя цифра, потом предпоследняя и т. д.).

$1 \to 8 \to -$

$3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 8 \to 7 \to 9$

$ \to 9 \to 7 \to 8 \to 4$

$ \to 7 \to 8 \to 4 \to -$

$5 \to 4 \to -$

$7 \to 2 \to 6 \to 1 \to 5 \to -$

$ \to 8 \to 4 \to 1 \to 3 \to 9 \to 5$

$9 \to -$

Ответ: 487915263, 593148627, 978415263.

Критерии. Каждый из ответов без обоснования оценивается в 1 балл. При наличии верного хода решения каждый потерянный ответ или каждый лишний ответ — -1 балл.

3. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 6 цифр без нуля. Паша посмотрел на последние три пароля — 125874, 585632, 785698 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? (*А. А. Теслер*)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Если в какой-то момент палец находится на чётной кнопке (2, 4, 6 или 8), то через два хода он снова окажется на чётной, причём это может произойти 8 способами: по 2 способа через углы и 4 способа через центр. Тогда, если пароль начинается с кнопки 5, то имеется 4 способа сдвинуться в чётную, а дальше 8^2 способов закончить пароль; если он начинается с одной из 4 угловых кнопок, то дальше есть 2 способа сдвинуться в чётную, и также 8^2 способов закончить пароль; если же он начинается с чётной кнопки, то есть 8^2 способов выбрать вторую-пятую цифры и 3 способа выбрать последнюю. Итого $8^2 \cdot (4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 1536$ способов.

Критерии. Для решения. похожего на вышеприведённое, каждый потерянный принципиальный случай — -2 балла, каждая арифметическая ошибка — -1 балл.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, M — середина стороны AB. Известно, что $AM = CM$, $\angle ADM = 40^\circ$. Найдите угол CDM. (*А. А. Кинтас*)

Ответ: 30°.

Решение. $AM = BM = CM$, то есть ABC — прямоугольный треугольник (с углом 30°), откуда $\angle BAC = 60^\circ$ и $AC = AM$. В треугольнике AMD есть углы 100° и 40°, то есть это равнобедренный треугольник, и $AM = AD$. Но тогда и ACD — равнобедренный с углом при вершине $100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, то есть $\angle ADC = 70^\circ$, а искомый $\angle CDM = 30^\circ$.

5. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки тот может гарантированно безопасно открыть. (*П. Д. Муленко*)

Подо мной не мимик	*Я не мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 2 мимика*	*Надо мной — мимик*

Ответ: Оба левых и правый нижний.

Решение. Точно не мимики два левых сундука (если верхняя левая надпись лжёт, то левая нижняя этому противоречит). Тогда правый верхний сундук — мимик (если нет, то в верхнем ряду нет мимика), значит, правый нижний сундук с золотом (на нём правдивая надпись), а средний верхний — тоже мимик. Таким образом, среди 5 сундуков уже нашлись два мимика, то есть средний нижний может быть как с золотом, так и мимиком (так как тогда мимиков будет три).

Критерии. Обосновано, что оба левых сундука не мимики — 2 балла. При этом приведено дальнейшее рассуждение, но участник однозначно определяет средний нижний сундук — 5 баллов.

6. На конференцию по математике в отель заселились 90 человек. В первый вечер они все распределились между тремя локациями: баром, столовой и конференц-залом, причём людей в баре оказалось в пять раз меньше, чем в столовой. Когда шестеро математиков перешли из конференц-зала в другие локации (кто-то в столовую, а остальные в бар), то в столовой оказалось вдвое меньше людей, чем в конференц-зале. Сколько человек находилось в каждой локации гостиницы первоначально и после перехода?

(*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Решение. Пусть изначально в баре было x человек, тогда в столовой $5x$, в конференц-зале $90-6x$. Когда люди перешли, в баре стало $x+y$, в столовой $5x+(6-y)$, в конференц-зале $90-6x-6$. Получаем уравнение $2(5x+6-y)=84-6x$, или $8x-y=36$, откуда $x=5, y=4$ (например, из соображений делимости на 4). Таким образом, изначально было 5, 25 и 60 человек, а стало 9, 27 и 54 человека.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.