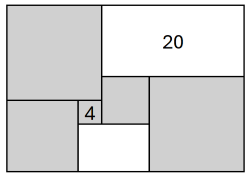
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Прямоугольник разрезали на белые прямоугольники и серые квадраты, как показано на рисунке, после чего вычислили периметры двух получившихся частей (указаны внутри). Найдите периметр исходного прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)

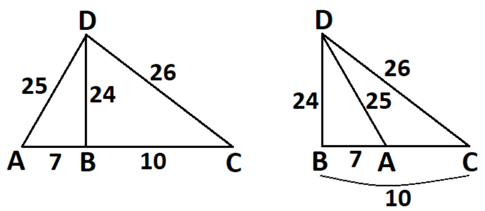


Решение. Обозначим сторону левого нижнего квадрата за x, а центрального — за y. Тогда сторона левого верхнего квадрата равна $x+1$, а правого — $x+y-1$. Тогда периметр верхнего прямоугольника равен $20 = 2((x+2-y)+(x+2y-1)) = 2(2x+y-1)$, то есть $2x = 9-y$. А тогда периметр исходного прямоугольника равен $2((2x+1)+(2x+2y)) = 2(4x+2y+1) = 2(18-2y+2y+1) = 38$.

Критерии. Решение заключается в демонстрации того, что ответ 38 подходит — 1 балл.
Арифметическая ошибка в финальном подсчёте — штраф в 1 балл.
Потерянные элементы (± 1, длина какой-то стороны) при составлении уравнения — штраф в 1 балл за каждый.

2. На плоскости отмечены точки A, B, C и D, причём $AB = 7$, $BC = 10$, $CD = 26$, $DA = 25$, $BD = 24$. Докажите, что длина отрезка AC тоже целая. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Заметим, что $7^2 + 24^2 = 25^2$, $10^2 + 24^2 = 26^2$. По обратной теореме Пифагора получаем, что углы ABD и CBD прямые. Значит, точки A, B, C лежат на одной прямой, и AC равно либо $10+7$, либо $10-7$ (см. рисунок).



Критерии. Упомянут только один способ расположения вместо двух — 4 балла. Найден только один прямой угол — 2 балла.

3. Придумайте три различных натуральных значения n, при каждом из которых $4^{35}+4^{48}+4^n$ является точным квадратом. (*С. П. Павлов*)

Решение. Подходят 21, 42, 60 (получаются квадраты чисел $2^{21}+2^{48}$, $2^{35}+2^{48}$, $2^{48}+2^{60}$, что легко проверить по формуле квадрата суммы).

Критерии. Правильные ответы без проверки, что получаются квадраты — 4 балла.
Если вместа числа 42 указан ответ 84 — штраф в 1 балл.
Каждый ответ — 2 балла.

4. Лес представляет собой координатную плоскость, в некоторых узлах которой растут ёлки. Всего ёлок больше миллиона. Докажите, что можно срубить более 200 000 ёлок так, чтобы расстояние между любыми двумя срубленными ёлками было больше 2. (Узлом называется точка, обе координаты которой целые; ёлки считаем точками.) *(А. А. Теслер)*

Решение. Раскрасим узлы в 5 цветов так, чтобы узлы одного цвета образовывали сетку из квадратов со стороной $\sqrt{5}$. Например, пусть цвет узла с координатами (x, y) определяется остатком от деления числа $x+2y$ на 5 (соответствующая раскраска для наглядности показана справа, если считать, что деревья растут в центрах квадратов). По принципу Дирихле, в какой-то из пяти цветов окрасились более 200 тысяч ёлок. Тогда все эти ёлки можно срубить, поскольку расстояние между любыми двумя из них не меньше $\sqrt{5}$.

2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4	0	1
1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4	0	1
1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3	4	0

Критерии. Идея правильной раскраски в пять цветов без доказательства того, что она работает — 3 балла.

5. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки тот может гарантированно безопасно открыть. *(П. Д. Муленко)*

Подо мной не мимик	*В нижнем ряду есть хотя бы один мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 2 мимика*	*Я не мимик*

Решение. Точно не мимики два левых сундука (если верхняя левая надпись лжёт, то левая нижняя этому противоречит). Тогда правый верхний сундук — мимик (если нет, то в верхнем ряду нет мимика). Трёх остальных однозначно вычислить не удаётся: один из соседей правого верхнего точно мимик, но оба варианта возможны, и, если правый нижний — мимик, то средний нижний может быть как мимиком, так и безопасным сундуком.

Критерии. Если сказано, что только левый верхний нормальный — 1 балл.

Показано, что два левых сундука — не мимики — 2 балла.

В случае неполного решения каждый найденный мимик стоит 1 балл. Эти баллы суммируются в пунктом выше. То есть решение с ответом в три мимика стоит 5 баллов (2+1+1+1).

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 10 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом он стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? *(А. А. Теслер)*

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: ++, +-, - -, -+. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 5 вопросов) и дать такие ответы: ++++++++++, - - - - - - - - - -, +++++- - - - -, - - - - -+++++. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.