Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 6 цифр без нуля. Паша посмотрел на последние три пароля — 125874, 585632, 785698 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? (*А. А. Теслер*)

① ② ③
④ ⑤ ⑥
⑦ ⑧ ⑨

Решение. Если в какой-то момент палец находится на чётной кнопке (2, 4, 6 или 8), то через два хода он снова окажется на чётной, причём это может произойти 8 способами: по 2 способа через углы и 4 способа через центр. Тогда, если пароль начинается с кнопки 5, то имеется 4 способа сдвинуться в чётную, а дальше 8^2 способов закончить пароль; если он начинается с одной из 4 угловых кнопок, то дальше есть 2 способа сдвинуться в чётную, и также 8^2 способов закончить пароль; если же он начинается с чётной кнопки, то есть 8^2 способов выбрать вторую-пятую цифры и 3 способа выбрать последнюю. Итого $8^2 \cdot (4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 1536$ способов.

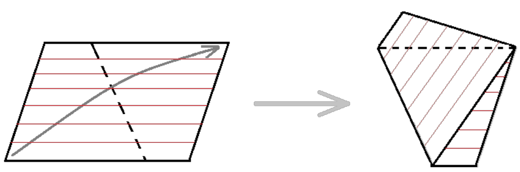
Критерии. Для решения. похожего на вышеприведённое, каждый потерянный принципиальный случай — -2 балла, каждая арифметическая ошибка — -1 балл.

2. Придумайте три различных натуральных значения n, при каждом из которых $4^{35}+4^{48}+4^{n}$ является точным квадратом. (*С. П. Павлов*)

Решение. Подходят 21, 42, 60 (получаются квадраты чисел $2^{21}+2^{48}$, $2^{35}+2^{48}$, $2^{48}+2^{60}$, что легко проверить по формуле квадрата суммы).

Критерии. Правильные ответы без проверки, что получаются квадраты — 4 балла.
Если вместа числа 42 указан ответ 84 — штраф в 1 балл.
Каждый ответ — 2 балла.

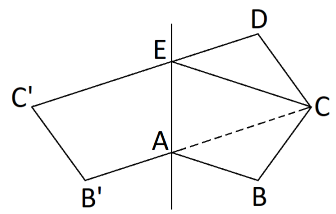
3. Можно ли, совместив две противоположные вершины параллелограмма (см. рисунок), получить правильный пятиугольник? (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: можно.

Решение. Пусть дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Заметим, что $AC = EC$, $AB = ED$. Кроме того, $\angle BAE = \angle DEA = 108^\circ$, $\angle CAE = \angle AEC = 72^\circ$. Из этого также следует, что $EC || AB$, $AC || DE$ (сумма односторонних углов равна 180°).

Отразим точки B и C относительно прямой AE — пусть они перейдут в точки B' и C'. В силу симметрии $\angle B'AE = 108°$, $\angle AEC' = 72°$. Поэтому $\angle DEC' = 108° + 72° = 180°$ и аналогично $\angle CAB' = 180°$. Значит, точки A и E лежат на сторонах четырёхугольника $C'DCB'$. Поскольку диагонали пятиугольника параллельны сторонам, то $B'C || C'D$. Кроме этого (в силу симметрии и исходя из первого абзаца), $C'D = C'E + ED = CE + ED = AC + AB = AC + AB' = B'C$. Значит, $C'DCB'$ — параллелограмм, и при его сгибании образуется правильный пятиугольник.



4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (16 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{z^2 + (16 - t)^2} + \sqrt{t^2 + (30 - x)^2},$$

где x, y, z, t — произвольные вещественные числа. (*С. П. Павлов*)

Решение. Стартуя в начале координат, последовательно отложим векторы $(x, 16 - y)$, $(30 - z, y)$, $(z, 16 - t)$, $(30 - x, t)$. Заметим, что сумма этих векторов равна $(60, 32)$, то есть имеет длину $\sqrt{60^2 + 32^2} = 68$. В то же время искомое выражение равно сумме длин векторов, поэтому оно не меньше 68 (причём равенство достигается, если все векторы коллинеарны, например, при $x = z = 15, y = t = 8$).

Ответ: 68.

Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

5. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Какое минимальное количество марок может изначально быть у Вити в красном альбоме? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 28.

Решение. Оценка. Упорядочим альбомы по количеству марок, начиная с наименьшего. Если во втором по количеству альбоме x марок, то в следующих не менее чем $x + 1, x + 2, \ldots, x + 7$. После расформирования первого альбома в каждом из остальных будет не менее $x + 7$ марок, то есть в них надо добавить не менее чем $7 + 6 + \ldots + 2 + 1 + 0 = 28$ марок.

Пример: 28, 35, 36, ..., 42. Суммарное количество марок тут делится на 7 и на 8 ($336 = 42 \cdot 8 = 48 \cdot 7$), поэтому можно сделать как 8 альбомов по 42 марки, так и 7 по 48 марок.

Критерии. Обратите внимание, что пример привести обязательно, иначе его наличие неочевидно. Пример — 2 балла.

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.