



Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2023-2024 учебный год. Заключительный этап  
"для 10 класса"



Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Даша выложила в ряд  $n$  карточек ( $5 \leq n \leq 100$ ), на которых по порядку написаны натуральные числа от 1 до  $n$ . После этого она перевернула две карточки чистой стороной вверх так, что произведение чисел между ними оказалось равным произведению всех остальных видимых чисел. Какому же числу равно каждое из этих произведений?

**Примечание.** Слева или справа от перевернутых карточек может не оказаться ни одного числа. (П. Д. Муленко)

2. Пусть  $f(x) = x^2 + 10x + 20$ . Решите уравнение  $f(f(f(x))) = 0$ . (П. Д. Муленко)

3. На окружности  $\omega$  отмечены точки  $A, B, C, D, E, F$  (в указанном порядке), причём  $AB = BC = CD$ . Прямая  $BE$  пересекает прямые  $CF$  и  $DF$  в точках  $G$  и  $H$  соответственно, а прямая  $AE$  пересекает прямые  $CF$  и  $BF$  в точках  $J$  и  $K$  соответственно. Лучи  $KG$  и  $JH$  пересекают окружность  $\omega$  в точках  $M$  и  $N$ , расстояние между которыми равно  $AB$ . Докажите, что прямые  $GK$  и  $JH$  пересекаются на  $\omega$ . (О. А. Пяйве)

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (16 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (30 - z)^2} + \sqrt{z^2 + (16 - t)^2} + \sqrt{t^2 + (30 - x)^2},$$

где  $x, y, z, t$  — произвольные вещественные числа.

(С. П. Павлов)

5. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме?

(Л. С. Корешкова)

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать?

(А. А. Теслер)