Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Найдите все такие положительные x, что последовательность $\{x\}$, $[x]$, x является геометрической прогрессией. (*Л. С. Корешкова*)

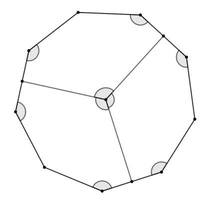
   Примечание. $[x]$ — это целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и его целой частью.

   Решение. Пусть $n = [x]$ и $\{x\} = \alpha$. В геометрической прогрессии из неотрицательных чисел, у которой последний член ненулевой, все члены положительны, то есть $n > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Данная последовательность будет геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $\alpha(n + \alpha) = n^2$, то есть $\alpha^2 + \alpha n = n^2$. Левая часть меньше $n + 1$, так что $n^2 \leqslant n$ и $n = 1$. У получившегося квадратного уравнения единственный положительный корень — это $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, он меньше 1. Тогда $x = \alpha + n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

   Критерии. За найденное решение даётся 2 балла. За найденное в явном виде соотношение между целой и дробной частью также даётся 2 балла.

2. На трёх сторонах выпуклого девятиугольника отмечено по одной точке (не совпадающей с вершинами). Внутри девятиугольника выбрали точку O и соединили с точками, отмеченными на сторонах. В результате девятиугольник разбился на три шестиугольника. Могут ли все три шестиугольника оказаться вписанными? (*А. А. Теслер*)

   Решение.
   У вписанного шестиугольника сумма углов, взятых через один, должна равняться 360°. Поэтому сумма девяти углов, отмеченных на рисунке, равна $180^\circ \cdot 6$. В то же время сумма всех углов девятиугольника равна $180^\circ \cdot 7$, а с добавлением углов при вершине O — $180^\circ \cdot 9$. Но это значит, что сумма трёх неотмеченых углов девятиугольника равна $180^\circ \cdot 3$, что невозможно.

3. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

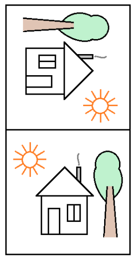
   Ответ: 14 кубиков.

   Решение. *Пример.* Уберём из одной грани куба всё, кроме центра, из противоположной грани уберём середины рёбер, а также уберём центры каких-то двух оставшихся противоположных граней.

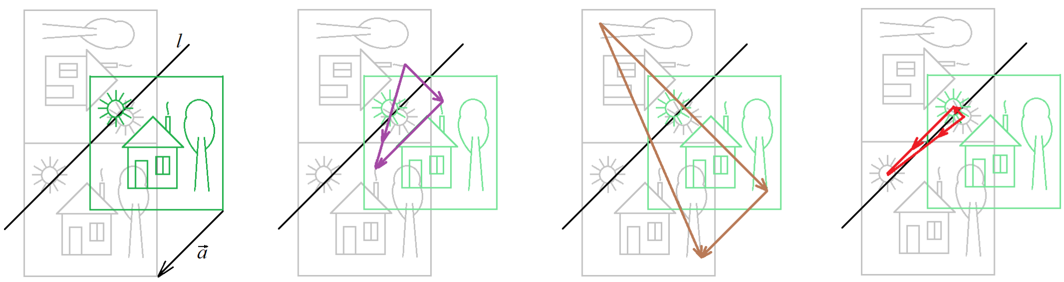
   Оценка. Пусть нам удалось оставить k кубиков так, что они примыкают по n внутренним граням друг к другу, а площадь поверхности та же, что у исходного куба. Тогда $6k - 2n = 54$, то есть $3k = n + 27$. С другой стороны, если получившееся тело связно по граням, то граф, в котором вершины — оставшиеся маленькие кубики, а рёбра — внутренние грани, является связным. Следовательно, $n \geqslant k - 1$ и $2k \geqslant 26$, то есть останется $k \geqslant 13$ кубиков, или будет убрано не более чем $27 - 13 = 14$ кубиков.

Критерии. Если доказана только оценка или приведён только пример, то даётся 3 балла.

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)



Решение. Рассмотрим движение плоскости, переводящее верхний квадрат в нижний. Оно является скользящей симметрией, то есть композицией симметрии относительно прямой l и переноса на вектор $\vec{a}$ (см. левую картинку). Для каждой точки расстояние — гипотенуза треугольника, катеты которого — перемещение при симметрии и перемещение при переносе (примеры приведены на картинках). Второй из катетов постоянен (и равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм), а первый катет надо минимизировать. В случае, когда точки лежат на оси симметрии (прямая, проходящая через середины двух смежных сторон квадрата), он равен нулю, поэтому для этих точек расстояние минимально и равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм.



Критерии. За найденный ответ с доказательством, что такое расстояние достигается, даётся 2 балла.

5. Числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 6$, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} = 2$. Чему может быть равно значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Тогда $xyz = 1$, $x + y + z = 6$, $xy + yz + xz = 2xyz = 2$, а найти следует значение выражения $x^3 + y^3 + z^3$. Заметим, что

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Значит, $x^3 + y^3 + z^3 = 3 + 6\left((x + y + z)^2 - 3(xy + xz + yz)\right) = 3 + 6 \cdot (36 - 6) = 183$.

Замечание. На самом деле таких вещественных чисел a, b, c не существует, так как $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x + y + z)xyz = -8 < 0$. Они существуют как комплексные числа: можно найти $\{x, y, z\}$ как множество корней кубического многочлена $t^3 - 6t^2 + 2t - 1$, а потом взять, например, $a = xy$, $b = y$, $c = 1$.

Ответ: 183.

Критерии. И найденный ответ с доказательством (когда предполагается существование a, b, c), и доказательство отсутствия таких вещественных чисел оцениваются в 7 баллов.

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 10, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 10. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, меньшее 111 111 111 111? (*А. А. Теслер*)

Решение. Будем записывать последовательность нажатий на кнопки как строку из букв С и К. Всего имеется C_{20}^{10} возможных последовательностей. Отсортируем все такие строки в таком порядке, что получающиеся числа будут идти по возрастанию. Этот порядок является лексикографическим (то есть сортировка по алфавиту, в котором первая буква С, а вторая К) в силу неравенства $10x + 10 < 10x + 100$, то есть при замене подстроки СК на КС значение увеличивается.

Нам нужно количество строк, не больших СКСКСКСКСКСКСКСКСКСК (у неё значение 111 111 111 110, а у следующей за ней СКСКСКСКСКСКСКСКСККС уже 111 111 111 200). Это в точности строки вида $(\mathrm{CK})^N\mathrm{CC}s$ (где $N \geqslant 0$; s — произвольный остаток, содержащий $10 - N$ букв К), а также сама строка $(\mathrm{CK})^{10}$ целиком.

Итого ответ — это

$$\frac{\sum_{N=0}^{9} \mathrm{C}_{20-2N-2}^{10-N} + 1}{\mathrm{C}_{20}^{10}} = \frac{60}{187}.$$

Ответ: $\frac{60}{187}$.

Критерии. Если доказан некий способ, позволяющий найти ответ руками (например, формула с биномиальными коэффициентами), то даётся 5 баллов.

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 10^9.

Решение. Пусть число n имеет вид $n = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где t не делится ни на 2, ни на 5. Тогда делители можно разбить на группы так, что в каждой группе есть: один делитель x (не кратный ни 2, ни 5); делители вида $2^i \cdot x$, где $i \geqslant 1$; делители вида $5^j \cdot x$, где $j \geqslant 1$; делители вида $2^i \cdot 5^j \cdot x$, где $i,j \geqslant 1$. Последние делители можно не учитывать, поскольку они учитываются в обоих случаях. Сумма делителей второго типа равна $x \cdot (2 + 2^2 + \ldots + 2^a)$, а третьего — $x \cdot (5 + 5^2 + \ldots + 5^b)$. Суммируя по всем $x|t$, получаем, что для исполнения условия должно быть $2 + 2^2 + \ldots + 2^a = 5 + 5^2 + \ldots + 5^b$.

Легко находимое решение — $a = 4, b = 2$, поскольку $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 5 + 5^2 = 30$. Это означает, что число делится на $2^4 \cdot 5^2 = 400$, но его частное от деления на 400 не кратно ни 2, ни 5. Иначе говоря, это число вида $400m$, где m даёт остаток 1, 3, 7 или 9 при делении на 10. Таких чисел 4 среди каждых 4000 последовательных чисел, то есть среди первых 10^{12} чисел их 10^9.

Поищем другие решения. Левая часть равна $2^{a+1} - 2$, а правая — $(5^{b+1} - 5)/4$. Получаем $2^{a+3} - 8 = 5^{b+1} - 5$, отсюда $2^{a+3} - 3 = 5^{b+1}$. При $b > 1$ это означает, что 2^{a+3} даёт остаток 28 при делении на 100. Последняя цифра 8 наблюдается при a, кратном 4, а две последние 28 — при $a = 20k + 4$. Случай $k = 0$ отмечен выше, а при $k \geqslant 1$ число уже превышает 10^{12}. Случай $b = 1$, очевидно, невозможен.

Критерии. За нахождение всех красивых чисел (без доказательства, что других нет) даётся 3 балла.