Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

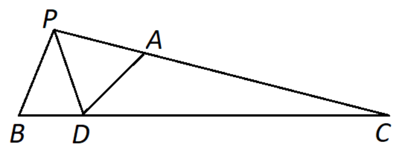
Ответ: 13.

Решение. Если составителей 11, то максимальное количество бубликов $3+4+\ldots+13 = 88 < 99$. Если их 12, то количество бубликов чётно (поскольку чётность при переходе к следующему составителю всегда меняется, то получается 6 чётных и 6 нечётных чисел). Значит, составителей хотя бы 13. Пример: $3+4+5+6+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = 99$.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, случаи 11 и 12 составителей — по 2 балла.

2. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD + AC = BC$. Известно, что $\angle ACD = 20°$, $\angle CAD = 120°$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

Решение.



Продолжим сторону CA за точку A на отрезок $AP = AD$. Рассмотрим треугольник PAD. Угол PAD как смежный с углом CAD, величина которого дана, равен $60°$. К тому же этот треугольник равнобедренный (по построению, $AP = AD$). Значит, $\triangle PAD$ равносторонний.

Далее рассмотрим треугольник PBD. Поскольку $\angle ADC = 180° - (120° + 20°) = 40°$, то, рассматривая углы при вершине B, получаем, что $\angle PDB = 180° - 40° - 60° = 80°$. Но такую же величину имеет и ещё один угол рассматриваемого треугольника: $\angle PBD = 80°$ (треугольник PCB равнобедренный по построению). Тем самым, равнобедренным является и треугольник PBD. Таким образом, $PB = PA$, т. е. треугольник PBA также равнобедренный, и величина его угла P нам известна ($80°$). Поэтому $\angle PBA = 50°$. Теперь мы можем определить величину искомого угла: $\angle ABC = 80° - 50° = 30°$.

Критерии. Найден угол $\angle BPC = 80°$ — 4 балла.

3. Числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 6$, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} = 2$. Чему может быть равно значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Тогда $xyz = 1$, $x+y+z = 6$, $xy+yz+xz = 2xyz = 2$, а найти следует значение выражения $x^3+y^3+z^3$. Заметим, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

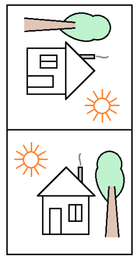
Значит, $x^3+y^3+z^3=3+6\left((x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)\right)=3+6\cdot(36-6)=183.$

Замечание. На самом деле таких вещественных чисел a,b,c не существует, так как x^2y^2+ $+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2(x+y+z)xyz=-8<0$. Они существуют как комплексные числа: можно найти $\{x,y,z\}$ как множество корней кубического многочлена t^3-6t^2+2t-1, а потом взять, например, $a=xy$, $b=y$, $c=1$.

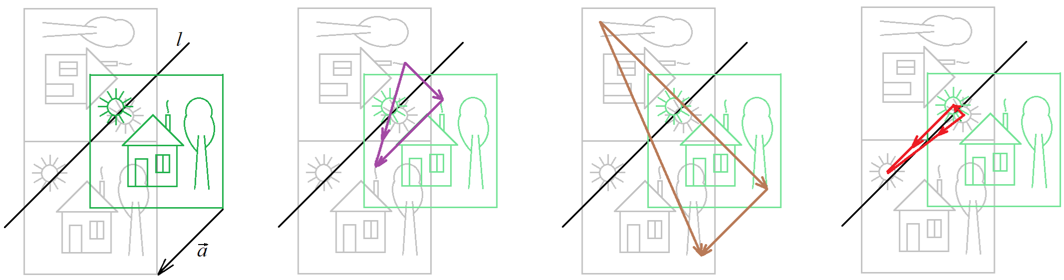
Ответ: 183.

Критерии. И найденный ответ с доказательством (когда предполагается существование a,b,c), и доказательство отсутствия таких вещественных чисел оцениваются в 7 баллов.

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)



Решение. Рассмотрим движение плоскости, переводящее верхний квадрат в нижний. Оно является скользящей симметрией, то есть композицией симметрии относительно прямой l и переноса на вектор $\vec{a}$ (см. левую картинку). Для каждой точки расстояние — гипотенуза треугольника, катеты которого — перемещение при симметрии и перемещение при переносе (примеры приведены на картинках). Второй из катетов постоянен (и равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм), а первый катет надо минимизировать. В случае, когда точки лежат на оси симметрии (прямая, проходящая через середины двух смежных сторон квадрата), он равен нулю, поэтому для этих точек расстояние минимально и равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм.



Критерии. За найденный ответ с доказательством, что такое расстояние достигается, даётся 2 балла.

5. Функция f такова, что при любом x выполняется равенство $f(f(x))=x^2-x+1$. Чему может равняться $f(0)$? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $f(0)=1$.

Решение. Полагая $x=0$ и $x=1$, получим: $f(f(0))=f(f(1))=1$. Также имеем: $f(f(f(0)))=f^2(0)-f(0)+1$. Значит, $f(1)=f^2(0)-f(0)+1$. Аналогично $f(1)=f^2(1)-$ $-f(1)+1$, откуда $f(1)=1$. Следовательно, получаем: $1=f^2(0)-f(0)+1$, т. е. либо $f(0)=0$ (что противоречит условию), либо $f(0)=1$.

Можно показать, что такая функция f действительно существует.

Критерии. Если доказано, что $f(0) \in \{0, 1\}$, но не исключён случай $f(0) = 0$, то ставится не больше 5 баллов. За нахождение $f(1)$ даётся 2 балла.

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 5, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 5. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, которое можно получить на этом калькуляторе и менее чем за 20 нажатий? (*А. А. Теслер*)

Решение. Знаменатель искомой вероятности равен C_{20}^{10}, а числитель — количеству последовательностей, которые можно укоротить.

Есть две ситуации, когда последовательность можно укоротить. Во-первых, $\times 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ эквивалентно $+5 \times 5$. Во-вторых, если в начале стоят восемь $+5$, то их можно заменить на $\times 5$ (поскольку $10 + 8 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$).

Докажем, что никакие другие последовательности укоротить невозможно. Действительно, рассмотрим число в пятеричной системе счисления. Изначально оно записывалось как 2, операция $+5$ добавляет единицу в первый разряд (с возможными переносами), а операция $\times 5$ сдвигает всю запись на один разряд влево с добавлением 0 в конце. При этом перенос может случиться только один раз для последовательности вида $+5+5+5\ldots$. Ясно, что при отсутствии переносов вся последовательность восстанавливается однозначно по полученному числу (в частности, её не укоротить). Если же в начале был перенос, то в старшем разряде числа будет стоять 1 вместо 2, и тогда последовательность тоже восстанавливается однозначно. Значит, надо посчитать последовательности с двумя указанными особенностями.

Последовательностей, где было бы и то и другое одновременно, не бывает, поскольку для этого надо хотя бы 13 «$+5$». Последовательностей второго типа C_{12}^2. В последовательностях первого типа подстрока «$\times 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$» может встречаться либо дважды (тогда надо расставить две таких подстроки и восемь «$\times 5$», это C_{10}^2), либо единожды (надо расставить такую подстроку, пять $+5$ и девять $\times 5$, то есть $\frac{15!}{5! \cdot 9!}$ способов, и из них в $2 \cdot C_{10}^2$ случаях подстрока встречается дважды).

Ответ: $\left(C_{12}^2 + \frac{15!}{5! \cdot 9!} - C_{10}^2\right) : C_{20}^{10} = \dfrac{30051}{184756}$.

Критерии. Каждый из двух способов укоротить последовательность оценивается в 1 балл, идея использовать пятеричную систему счисления — в 2 балла. За правильно найденный ответ без доказательства того, что непосчитанные последовательности нельзя укоротить, ставится не больше 4 баллов.

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 10^9.

Решение. Пусть число n имеет вид $n = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где t не делится ни на 2, ни на 5. Тогда делители можно разбить на группы так, что в каждой группе есть: один делитель

x (не кратный ни 2, ни 5); делители вида $2^i \cdot x$, где $i \geqslant 1$; делители вида $5^j \cdot x$, где $j \geqslant 1$; делители вида $2^i \cdot 5^j \cdot x$, где $i,j \geqslant 1$. Последние делители можно не учитывать, поскольку они учитываются в обоих случаях. Сумма делителей второго типа равна $x \cdot (2+2^2+\ldots+2^a)$, а третьего — $x \cdot (5+5^2+\ldots+5^b)$. Суммируя по всем $x|t$, получаем, что для исполнения условия должно быть $2+2^2+\ldots+2^a = 5+5^2+\ldots+5^b$.

Легко находимое решение — $a = 4, b = 2$, поскольку $2+2^2+2^3+2^4 = 5+5^2 = 30$. Это означает, что число делится на $2^4 \cdot 5^2 = 400$, но его частное от деления на 400 не кратно ни 2, ни 5. Иначе говоря, это число вида $400m$, где m даёт остаток 1, 3, 7 или 9 при делении на 10. Таких чисел 4 среди каждых 4000 последовательных чисел, то есть среди первых 10^{12} чисел их 10^9.

Поищем другие решения. Левая часть равна $2^{a+1}-2$, а правая — $(5^{b+1}-5)/4$. Получаем $2^{a+3}-8 = 5^{b+1}-5$, отсюда $2^{a+3}-3 = 5^{b+1}$. При $b > 1$ это означает, что 2^{a+3} даёт остаток 28 при делении на 100. Последняя цифра 8 наблюдается при a, кратном 4, а две последние 28 — при $a = 20k+4$. Случай $k = 0$ отмечен выше, а при $k \geqslant 1$ число уже превышает 10^{12}. Случай $b = 1$, очевидно, невозможен.

Критерии. За нахождение всех красивых чисел (без доказательства, что других нет) даётся 3 балла.