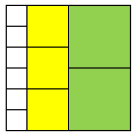
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 5 класса

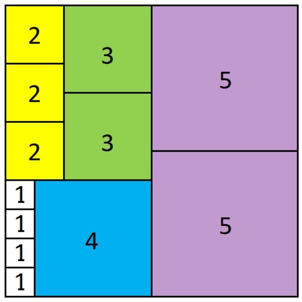
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ «да» — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите хотя бы одно решение этого ребуса. (*П. Д. Муленко*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: $9267 \cdot 111 = 1028637$.

Решение. Очевидно, что $T = 9$, $J = 1$, $A = 0$ ($8999 \cdot 111 < 1000000$, $9876 \cdot 111 < 1100000$). Минимальное значение $R = 2$, тогда $92IO \cdot 111 = 102MILO$. Далее подбором получается $9267 \cdot 111 = 1028637$.

Примечание. На самом деле это единственное решение.

Критерии. Просто ответ без обоснования — 7 баллов.

3. Пятиклассник Паша хочет во время летних каникул регулярно ходить в бассейн. Он планирует каждую неделю тренироваться 2 дня утром и вечером и 4 дня — только вечером. При этом он не сможет тренироваться и утром, и вечером два дня подряд. Он хочет спланировать свои тренировки на неделю и придерживаться этого расписания всё лето. Сколькими способами он может это сделать? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 70 способов.

Решение. У Паши есть $C_7^2 = 7 \cdot 6/2 = 21$ способ выбрать пару дней, когда он будет тренироваться и утром, и вечером, но 7 способов из них (соответствующих подряд идущим дням: понедельник и вторник, вторник и среда, ..., суббота и воскресенье, воскресенье и понедельник) не подходят. Для каждого оставшегося способа он ещё должен выбрать один выходной среди оставшихся 5 дней. Итого $(21 - 7) \cdot 5 = 70$ способов.

Критерии. Просто верный ответ без обоснований — 1 балл.

Если участник не заметил, что воскресенье и понедельник — соседние дни, и это привело к ответу 75 — 5 баллов.

Если в решении нет корректного комбинаторного обоснования, но все вычисления верные — отнимаем 2 балла.

4. Турист Олег посетил деревню Хитрецово, в которой три касты: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Олег подошёл к шести жителям и спросил (один раз), являются ли они подражателями, на что услышал в ответ 3 разных фразы, каждую по два раза. Сколько среди этих шести жителей могло быть подражателей? Укажите все возможные варианты. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: от 2 до 4 подражателей.

Решение. Так как в ответ Олег услышал три разных ответа, то помимо «Да» и «Нет» двое из жителей должны были повторить сам вопрос туриста: «Вы подражатель?» Помимо этого, первый из ответивших «Да» обязан быть лжецом (второй ответ «Да» мог сказать ещё один подражатель сразу после), а первый ответивший «Нет» — рыцарем. Итого, подражателей не более четырёх.

Критерии. Верный ответ с примерами (но без доказательства, что других вариантов не бывает) — 3 балла. Верный ответ без примеров — 1 баллов.

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, за первые 60 секунд включительно (и с учётом первой овцы и первого раската) гром ударил трижды, а за первые 90 секунд включительно он насчитал 23 овцы. Как часто бегают овцы? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 5 секунд.

Решение. Раз за первые 60 секунд гром ударил всего три раза, то между раскатами проходит более 20 секунд. Значит, за последующие 30 секунд гром ударил ещё не более двух раз, то есть за 90 секунд Андрюша 4 или 5 раз посчитал овцу дважды, и в реальности пробежало $23 - 4 = 19$ или $23 - 5 = 18$ овец. Между ними было 18 или 17 равных временных промежутков соответственно (и, возможно, в несколько последних секунд никто не пробегал), тогда длина одного не более $90 : 18 = 5$ и $90 : 17 = 5\,\frac{5}{17} < 6$ секунд. Тогда время между двумя овцами составляет 5 секунд (поскольку оно должно быть целым числом), и овец всё-таки было 19. А если бы между овцами проходило 4 секунды или меньше, Андрюша бы насчитал не менее $90 : 4 + 4 > 26$ овец.

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире

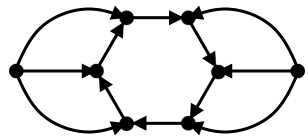
остались всего 2 участника, причём оба ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 8 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x+2$ участников выступил в трёх дуэлях, поэтому их число равно $3\cdot(x+2)/2$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждый дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $2x$:

$$\frac{3}{2}\cdot(x+2)=2x \quad\Leftrightarrow\quad 3x+6=4x \quad\Leftrightarrow\quad x=6.$$

Пример дуэлей на $6+2=8$ участников можно построить так: шестеро выбывших сыграли друг с другом по кругу, и двое непобеждённых выигрывали по одному разу у троих из них (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Верный ответ и пример — 2 балла.

7. Какое наибольшее количество попарно различных натуральных чисел, не больших 10, можно выбрать так, чтобы для любого числа N из выбранных было верно, что произведение всех остальных чисел нацело делится на N? (*С. П. Павлов*)

Ответ: 9 (все, кроме числа 7).

Решение. Все первые 10 натуральных чисел взять нельзя, так как есть число 7, и произведение всех остальных чисел на 7 делиться не будет. Далее легко проверяется, что набор из 9 чисел без числа 7 подходит: произведение всех чисел $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9\cdot10=518400$ нацело делится на квадраты всех множителей, поэтому взяв любое число x, произведение остальных чисел, равное $518400:x$, будет делиться на x.