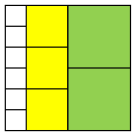
Решения задач для 6 класса

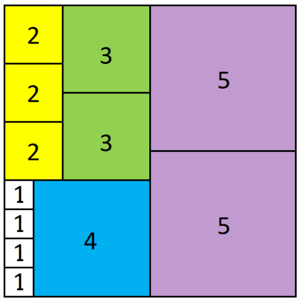
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.)
Примечание. Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ «да» — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите наименьшее возможное значение числа $TRIO$ (и докажите, что оно наименьшее возможное). (*П. Д. Муленко*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: 9267.

Решение. Очевидно, что $T = 9$, $J = 1$, $A = 0$ ($8999 \cdot 111 < 1000000$, $9876 \cdot 111 < 1100000$). Минимальное значение $R = 2$, тогда $92IO \cdot 111 = 102MILO$. Распишем на разрядные слагаемые и преобразуем:

$$1021200 + 1110 \cdot I + 111 \cdot O = 1020000 + 1000 \cdot M + 100 \cdot I + 10 \cdot L + O,$$
$$120 + 101 \cdot I + 11 \cdot O = 100 \cdot M + L,$$
$$120 + 10 \cdot O + (I + O - L) = 100(M - I).$$

Правая часть этого выражения кратна 100, поэтому и левая обязана, отсюда или $(I + O - L) = 0$ (и тогда $O = 8$), или $(I + O - L) = 10$ (и тогда $O = 7$). В первом случае получается, что $I + 8 = L$, но это невозможно, ведь цифры 1 и 9 уже заняты. Во втором случае $I = 6$, $L = 3$, что даёт решение $9267 \cdot 111 = 1028637$. Иные решения данного ребуса, если и имеются, имеют цифру $R \geqslant 3$, что заведомо больше найденного.

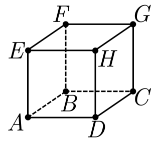
Примечание. На самом деле это единственное решение данного ребуса.

Критерии. Просто ответ без обоснования – 2 балл

3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \vdots 4, \\ (C+D+H+G) \vdots 4, \\ (F+B+C+G) \vdots 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Какое наибольшее число подражателей могло быть среди жителей? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 8 подражателей.

Решение. Пример: ПППЛППППР (первые три подражателя просто повторяют вопрос, потом лжец и вслед за ним пять подражателей говорят «Да», и наконец, рыцарь отвечает «Нет»).

Оценка. Заметим, что в любом случае ответ «Нет» и первый из ответов «Да» не могли быть произнесены подражателями, то есть по крайней мере двое — не подражатели.

Критерии. Только оценка — 2 балла. Только верный пример — 3 балла

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, и, начиная отсчёт времени с этого момента (то есть с учётом первой овцы), на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю овцу, а на 100-й секунде — 26-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 25 секунд.

Решение. Обозначим за a число ударов молнии за первые 60 секунд и за b — число ударов за 100 секунд. Тогда реальные числа пробежавших овец равны $16 - a$ за 60 секунд и $26 - b$ за 100 секунд, между которыми прошло $15 - a$ и $25 - b$ промежутков соответственно. Промежутки равны по длине, поэтому

$$\frac{60}{15-a} = \frac{100}{25-b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15-a}{3} = \frac{25-b}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 3b = 5a,$$

то есть число ударов грома в первые 60 секунд кратно 3. Также мы знаем, что ударов грома было не больше, чем самих овец: $16 - a \geqslant a$ или $a \leqslant 8$, откуда a равно 3 или 6. Целая длина промежутка (5 секунд) получается только при $a = 3$ (и, следовательно, $b = 5$).

Так как каждый раскат грома совпадает с появлением овцы, а овцы пробегают раз в 5 секунд, то время между ударами молнии кратно 5. За 60 секунд (включая начальный момент) гром гремел трижды, то есть между раскатами проходило 25 или 30 секунд, но с 30-секундными интервалами за 100 секунд не успело бы произойти 5 ударов.

Примечание. Теоретически фразу «на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю овцу» можно интерпретировать как «на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю и 17-ю овец» (вместо 15-й и 16-й, как подразумевается в решении). В таком случае получается, что овцы пробегают каждые 5 секунд, а молнии бьют каждые 20 секунд. Такое решение также засчитывалось как верное.

Критерии. За хотя бы один верный ответ — 2 балла.
Если доказывается, что 25 — единственный верный ответ — 7 баллов.
Если присутствует альтернативный ответ с подтверждающим примером и не доказывается, что других ответов нет — 3 балла.

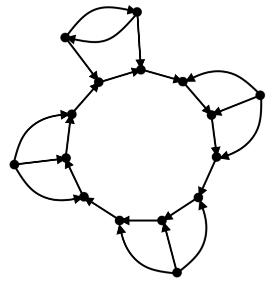
6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались всего 5 участников, причём только трое из них ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 16 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x + 5$ участников выступил в трёх дуэлях, поэтому их число равно $3 \cdot (x + 5)/2$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждой дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $2x + 2$ (ещё по одному поражению от двух финалистов турнира):

$$\frac{3}{2} \cdot (x + 5) = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 15 = 4x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11.$$

Пример дуэлей на $11+5=16$ участников можно построить так: одиннадцать выбывших сыграли друг с другом по кругу, трое непобеждённых выигрывали по одному разу у троих из них, двое оставшихся финалистов сыграли два раза между собой и по одному с разу с оставшимися из выбывших (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Верный ответ и пример – 3 балла.

7. Найдите как можно большее натуральное число с попарно различными цифрами, обладающее следующим свойством: любое двузначное число, образованное двумя соседними цифрами в порядке их следования в числе, является простым. (Например, таким свойством обладает число 473, поскольку 47 и 73 — простые числа.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: 89731.

Решение. Заметим, что при отсутствии в искомом числе чётных цифр оно будет не более чем пятизначным. Чтобы оно было пятизначным, необходимо использовать все нечётные цифры, причём цифру 5 необходимо поставить первой. Такое наибольшее возможное число строится однозначно: 59731.

Чётных цифр в искомом числе, очевидно, не более одной, и, если чётная цифра есть, стоит она на первом месте. В таком случае все остальные цифры — нечётные, причём пятёрку использовать уже нельзя. Максимально возможное число строится однозначно: 89731. Из двух найденных чисел выбираем наибольшее — 89731.