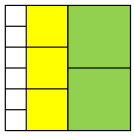
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 7 класса

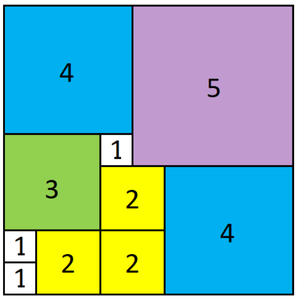
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 10 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. На доске написано пятизначное число. Рядом написали четырёхзначное число, полученное из исходного вычеркиванием средней цифры (например, если было написано 20723, то рядом написано 2023). Когда результат деления исходного пятизначного числа на это четырёхзначное будет целым? Найдите все такие пятизначные числа. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: Это все числа, кратные 1000, то есть $10\,000, 11\,000, \ldots, 99\,000$.

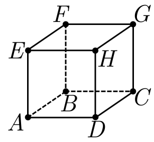
Решение. Обозначим через x число, образованное первыми двумя цифрами, через y — число, образованное последними двумя цифрами исходного числа, а через c — среднюю цифру. Тогда $1000x + 100c + y$ (исходное число) делится на $100x + y$ (новое число), то есть $100c - 9y$ делится на $100x + y \geqslant 1000$. С другой стороны, $-9 \cdot 99 \leqslant 100c - 9y \leqslant 900$, то есть $100c - 9y$ по модулю меньше 1000. Это значит, что $100c = 9y$. При ограничениях $0 \leqslant c \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 99$ из этого следует, что $c = y = 0$. Поэтому исходное число — это любое число вида $1000 \cdot x$, где $10 \leqslant x \leqslant 99$ — целое.

Критерии. Доказано, что все пятизначные числа кратные 1000 подходят – 2 балла. Доказано, что все остальные не подходят – 5 баллов.

3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \,\vdots\, 4, \\ (C+D+H+G) \,\vdots\, 4, \\ (F+B+C+G) \,\vdots\, 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Затем он так же спросил всех, кроме последнего: «Сосед за вами — лжец?» На этот раз среди ответов снова прозвучало ровно 6 раз «Да». Какое наибольшее число лжецов могло быть среди жителей?

(*П. Д. Муленко*)

Ответ: 3 лжеца.

Решение. Рассмотрим первый вопрос. Раз только 7 ответов были «Да» или «Нет», остальные три были повторениями заданного вопроса, то есть первые трое человек точно подражатели. Четвёртый ответ был уже дан точно не подражателем.

Если это был рыцарь, то он бы ответил «Нет», а все следующие ответы были «Да». Тогда следующий за ним человек (пятый по счёту) точно рыцарь (лжец не мог сказать правду, а подражатель повторил бы ответ «Нет»). Назовём эту расстановку «ПППРР∗».

Если же четвёртый человек был лжец, то он ответил «Да». Единственный ответ «Нет» тогда мог сказать или лжец после рыцаря, или рыцарь после не рыцаря. Но первый вариант невозможен, так как такой рыцарь (стоящий перед лжецом) должен сказать «Да», то есть перед ним тоже будет стоять рыцарь, который тоже скажет «Да», и так далее. Поэтому «Нет» говорит первый рыцарь в шеренге. Назовём эту расстановку «ПППЛ∗Р∗».

На второй вопрос прозвучали только ответы «Да» от людей с четвёртого по девятого включительно. В расстановке «ПППРР∗» это означает, что первый рыцарь назвал второго лжецом, что приводит к противоречию. Остаётся расстановка «ПППЛ∗Р∗», в которой первый рыцарь оказывается и последним человеком в ряду, так как иначе следом за ним должен был стоять лжец, который не мог бы ответить «Да» на первый вопрос. Таким образом, единственная возможная расстановка выглядит как «ПППЛ$*$Р», причём на свободных местах стоят только лжецы и подражатели.

Всякий лжец, сказав «Да», однозначно определяет следующего человека как не лжеца, то есть лжецы рядом не стоят. Отсюда получается, что лжецы могут стоять не более, чем на трёх местах (например, на 4, 6 и 8).

Критерии. Приведён пример расстановки для 3 лжецов — 2 балла.
Доказано, что более трёх лжецов не может быть, но пример не приведён — 5 баллов.

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) вычитает очередную овцу, а не прибавляет. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Начиная отсчёт времени с первой овцы, на 60-й секунде Андрюша посчитал 8-ю овцу, а на 100-й секунде — 12-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 16 секунд.

Решение. Обозначим за a число ударов молнии за первые 60 секунд и за b — число ударов за 100 секунд. Тогда реальные числа пробежавших овец равны $8+2a$ за 60 секунд и $12+2b$ за 100 секунд, между которыми прошло $7+2a$ и $11+2b$ промежутков соответственно. Промежутки равны по длине, поэтому

$$\frac{60}{7+2a} = \frac{100}{11+2b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7+2a}{3} = \frac{11+2b}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 3b = 5a+1,$$

то есть число ударов грома в первые 60 секунд даёт остаток 1 при делении 3. Также мы знаем, что длина промежутка более двух секунд, то есть за первые 60 секунд прошло не более 30 овец (включая самую первую): $7+2a \leqslant 30$ или $a \leqslant 11$, откуда a равно 1, 4, 7 или 10. Целая длина промежутка (4 секунды) получается только при $a = 4$ (и, следовательно, $b = 7$).

Так как каждый раскат грома совпадает с появлением овцы, а овцы пробегают раз в 4 секунды, то время между ударами молнии кратно 4. За 100 секунд гром гремел 7 раз, то есть между раскатами проходило больше 12 секунд ($100/8 > 12$) и меньше 17 секунд ($100/6 < 17$). Таким образом, молния била раз в 16 секунд, что возможно, если она ударила в первый раз на первой или второй овце.

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший три раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в четырёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались аккурат трое участников. При каком наибольшем числе участников такое могло произойти? Не забудьте привести пример. (*П. Д. Муленко*)

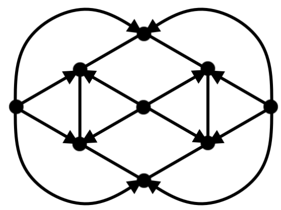
Ответ: 9 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x+3$ участников выступил в четырёх дуэлях, поэтому их число равно $4 \cdot (x+3)/2 = 2x+6$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждый дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $3x+y$, где y — целое число от 0 до 6 — число поражений финалистов Турнира:

$$2x+6=3x+y \quad \Leftrightarrow \quad x=6-y.$$

Таким образом, наибольшее число участников $(6+3=9)$ будет достигнуто при $y=0$ (то есть если финалисты не проиграют ни разу).

Пример дуэлей можно построить так: шестеро выбывших сыграли друг с другом по кругу, а трое непобеждённых выигрывали по одному разу у четверых из них так, что у каждый из выбывших проиграл двум финалистам (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 5 баллов.

7. В выражении $\dfrac{a+b}{c+d-e}+\dfrac{f+g}{h+i-k}$ буквами обозначены попарно различные цифры. Чему равно наибольшее возможное значение этого выражения? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $\dfrac{5+7}{0+2-1}+\dfrac{8+9}{3+4-6}=29.$

Решение. Каждая дробь максимальна, если её числитель максимально возможный, а знаменатель — минимально возможный положительный. Выпишем возможные значения числителей в порядке уменьшения: $17=9+8$, $16=9+7$, $15=8+7$ или $9+6$, $14=9+5$ или $8+6$, $13=9+4$ или $8+5$ или $7+6$, и так далее. Нетрудно видеть, что наибольшая возможная сумма двух из этих значений, составленная из четырёх различных цифр, равна $30=17+13=(9+8)+(7+6)$ или $15+15=(9+6)+(8+7)$. Именно этому будет равна сумма дробей при условии равенства 1 их знаменателей.

Заметим, что в каждом случае в числителях использованы цифры 9, 8, 7, 6. Поэтому для получения общего значения в 30 необходимо из оставшихся цифр $(0,1,2,3,4,5)$ образовать две группы по 3 числа, в каждой из которых сумма двух цифр за вычетом оставшейся равна 1. Но это невозможно: если бы такое удалось, то сумма двух знаменателей $(c+d-e)+(h+i-k)$ должна была бы равняться 2. Так как $0+1+2+3+4+5=15$, то при замене любого плюса на минус результат уменьшается на чётное число, а потому если заменить два плюса на минусы, то результат останется нечётным.

Значит, сумма знаменателей не может быть равна 2, тем самым, общая сумма в 30 недостижима. Если один из знаменателей сделать равным хотя бы 2, то максимальная сумма даже теоретически не превысит $17/1+17/2=25{,}5$. А со знаменателями, равными 1, и общей суммой в 29 пример строится.

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 5 баллов.