Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

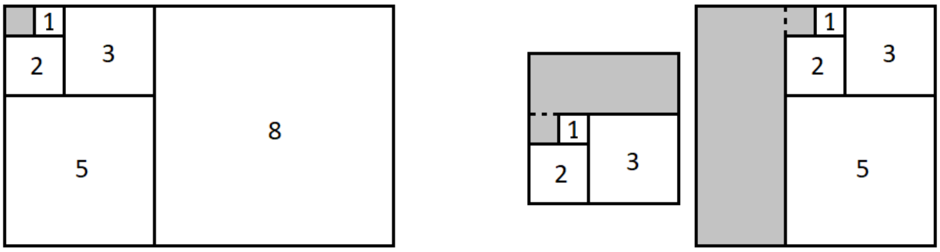
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

Ответ: для всех.

Решение.



Заметим, что при всех N существует способ составить прямоугольник из $N+1$ квадратов, среди которых повторяются только два, причём один из повторяющихся квадратов находится в углу. Процесс порождения таких прямоугольников показан на рисунке слева (каждый новый квадрат добавляется либо справа, либо снизу; в каждом квадрате написана длина его стороны). Теперь возьмём прямоугольник, содержащий $N+1$ квадрат, и дополним его до квадрата сверху или слева (примеры для $N=3$ и $N=4$ показаны на двух правых рисунках). Остаток большого квадрата примыкает к лишнему квадрату 1×1, образуя шестиугольник.

Критерии. Разобраны отдельные примеры — 0 баллов.
Задача решена с верным ответом с каким-то верным недоказанным предположением — максимум 3 балла.
Доказано, что все $N > const$ подходят — максимум 5 баллов.

2. Катя написала на доске два числа, после чего зашифровала их по правилам буквенных ребусов (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Получились слова $FORMULO$ и $JARMILO$. Какое минимальное и максимальное значения может принимать разность между исходными числами? (*А. А. Теслер*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «formulo» — формула, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: 99300 и 8800500.

Решение. Заметим, что эта разность равна $|10^6(F-J)+10^5(O-A)+10^2(U-I)|$.

Чтобы максимизировать разность, надо сначала максимизировать $F-J$, потом $O-A$ и наконец $U-I$. Максимальное значение $F-J$ равно $9-1=8$, максимальное при этом условии значение $O-A$ равно $8-0=8$, наконец, максимальное значение $U-I$ при этих условиях равно $7-2=5$. Тогда разность равна 8800500. Пример: $9854738-1054238=8800500$.

Чтобы минимизировать разность (при условии, что она положительна), нужно, чтобы $F-J$ по модулю было минимально. Не умаляя общности, пусть $F > J$, тогда минимальное значение $F-J$ равно 1. Две другие разности надо сделать отрицательными и как можно большими по модулю. Минимальное значение $O-A$ равно $0-9=-9$, а минимальное значение $U-I$ при этом условии $1-8=-7$. Тогда разность будет равна $10^6-9\cdot10^5-7\cdot10^2=99300$. Пример: $3045160-2945860=99300$.

Замечание. Если считать, что разность может быть и отрицательной, то минимальная разность противоположна максимальной и равна -8800500.

Критерии. Оба решения — и с ответом -8800500, и с ответом 99300 — считаем верными.

За каждый ответ с примером — 1 балл.

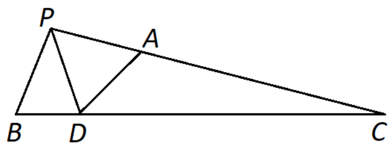
Арифметические ошибки — штраф в 2 балла.

Если верно посчитана положительная разница и неверно отрицательная — баллы не снимаются.

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD+AC=BC$. Известно, что $\angle ACD=20^\circ$, $\angle CAD=120^\circ$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

Решение.

Продолжим сторону CA за точку A на отрезок $AP=AD$. Рассмотрим треугольник PAD. Угол PAD как смежный с углом CAD, величина которого дана, равен 60°. К тому же этот треугольник равнобедренный (по построению, $AP=AD$). Значит, $\triangle PAD$ равносторонний.



Далее рассмотрим треугольник PBD. Поскольку $\angle ADC=180^\circ-(120^\circ+20^\circ)=40^\circ$, то, рассматривая углы при вершине B, получаем, что $\angle PDB=180^\circ-40^\circ-60^\circ=80^\circ$. Но такую же величину имеет и ещё один угол рассматриваемого треугольника: $\angle PBD=80^\circ$ (треугольник PCB равнобедренный по построению). Тем самым, равнобедренным является и треугольник PBD. Таким образом, $PB=PA$, т. е. треугольник PBA также равнобедренный, и величина его угла P нам известна (80°). Поэтому $\angle PBA=50^\circ$. Теперь мы можем определить величину искомого угла: $\angle ABC=80^\circ-50^\circ=30^\circ$.

Критерии. Найден угол $\angle BPC=80^\circ$ — 4 балла.

4. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 13.

Решение. Если составителей 11, то максимальное количество бубликов $3+4+\ldots+13=88<99$. Если их 12, то количество бубликов чётно (поскольку чётность при переходе к следующему составителю всегда меняется, то получается 6 чётных и 6 нечётных чисел). Значит, составителей хотя бы 13. Пример: $3+4+5+6+5+6+7+8+9+10+11+12+13=99$.

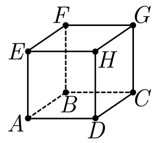
Критерии. Пример оценивается в 3 балла, случаи 11 и 12 составителей — по 2 балла.

5. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты,

отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \,\vdots\, 4, \\ (C+D+H+G) \,\vdots\, 4, \\ (F+B+C+G) \,\vdots\, 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

6. На острове живут 2023 человека. Некоторые из них дружат между собой (если А дружит с Б, то и Б дружит с А), причём у каждого не более 10 друзей. На остров едет бригада врачей, которые собираются привить часть жителей. Требуется, чтобы у каждого, кто останется не привит, все друзья были привиты. Какое минимальное количество доз вакцины врачи должны взять с собой, чтобы их гарантированно хватило? (*О. А. Пяйве*)

Ответ: 1839.

Решение. *Оценка.* Раскрасим вершины графа правильным образом — для этого хватит 11 цветов. Вакцинируем всех, кроме тех, чей цвет оказался самым популярным. Тогда количество доз не превышает $[2023 \cdot \frac{10}{11}] = 1839$.

Пример. Если разбить всех на полные 11-вершинные графы (те, кто останется, образуют полный подграф поменьше), то в каждом подграфе можно оставить только одного, итого не вакцинированы будут лишь 184 человека.

Критерии. Отдельно пример — 2 балла. Отдельно оценка — 4 балла.

Решение с ответом 1840 — 5 баллов. Только оценка или только пример на 1840 — 1 балл.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Решение. Умножим обе части уравнения на 4 и прибавим к ним по 16. Получившееся уравнение запишем в виде $(xy+4)^2 - (2x+2y-xy)^2 = 20$. Разложим левую часть на множители и поделим уравнение на 4. Приходим к равенству $(2+x+y)(xy+2-x-y) = 5$. Рассматривая 4 варианта для значений выражений в скобках (-5 и -1, -1 и -5, 1 и 5, 5 и 1), находим пары (x, y): $(-5, 2), (2, -5), (1, 2), (2, 1)$.

Критерии. Только найдены 4 ответа (без обоснования, что других нет) — 2 балла. Только какие-то два ответа — 1 балл.

Решение, приводящее только к одной паре ответов — 4 балла.