Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

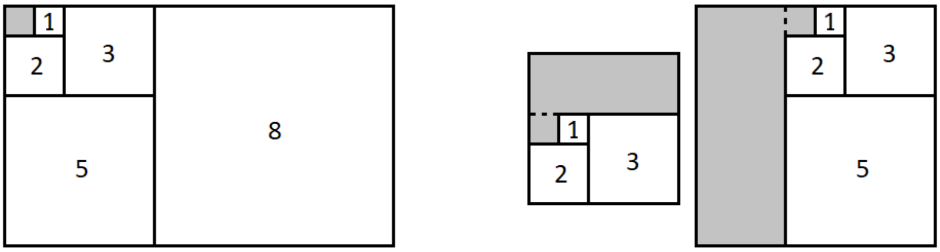
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

Ответ: для всех.

Решение.



Заметим, что при всех N существует способ составить прямоугольник из $N+1$ квадратов, среди которых повторяются только два, причём один из повторяющихся квадратов находится в углу. Процесс порождения таких прямоугольников показан на рисунке слева (каждый новый квадрат добавляется либо справа, либо снизу; в каждом квадрате написана длина его стороны). Теперь возьмём прямоугольник, содержащий $N+1$ квадрат, и дополним его до квадрата сверху или слева (примеры для $N=3$ и $N=4$ показаны на двух правых рисунках). Остаток большого квадрата примыкает к лишнему квадрату 1×1, образуя шестиугольник.

Критерии. Разобраны отдельные примеры — 0 баллов.
Задача решена с верным ответом с каким-то верным недоказанным предположением — максимум 3 балла.
Доказано, что все $N > const$ подходят — максимум 5 баллов.

2. В выпуклом четырёхугольнике точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что середины отрезков AM, DM, BN, CN лежат на одной прямой или образуют параллелограмм. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим середины четырёх указанных отрезков через E, F, G, H соответственно. Докажем, что векторы $\overrightarrow{EG}$ и $\overrightarrow{HF}$ противоположны — из этого как раз будет следовать, что отрезки EG и HF равны и параллельны (признак параллелограмма) или лежат на одной прямой. Иначе говоря, нужно доказать, что $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{0}$.

Пусть O — произвольная точка, которую мы будем использовать как начало координат. Тогда

$$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HF}=(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE})-(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OH})=$$
$$=\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}}{2}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}\right)-\left(\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}}{2}-\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}\right)=$$
$$=\left(\overrightarrow{ON}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}\right)-\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)=\overrightarrow{0},$$

поскольку M и N — середины BC и AD.

Критерии. Каждый нетривиальный факт, который не был доказан — штраф в 2 балла.

Задача решена в случае $BC \parallel AD$ — 2 балла.

Факт, что медиана делит среднюю линию пополам, не требует доказательства.

3. График квадратичной функции, старший коэффициент которой равен 1, пересекает прямую $y=x$ в двух точках, расстояние между которыми равно 3, а прямую $y=-x$ — в двух точках, расстояние между которыми равно 2. А каково расстояние между точками, в которых он пересекает прямую $y=2x$? (*А. А. Теслер*)

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Запишем нашу функцию в виде $f(x)=x^2+px+q$. Поскольку прямые $y= =\pm x$ проходят под углом 45° к оси абсцисс, то расстояние между точками пересечения в $\dfrac{1}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}$ раз больше, чем разность между корнями уравнения $f(x)=\pm x$. Таким образом, разность между корнями трёхчлена $x^2+(p-1)x+q$ равна $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{4{,}5}$, а разность между корнями трёхчлена $x^2+(p+1)x+q$ равна $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Из формулы $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ легко понять (учитывая, что $a=1$), что эта разность равна $\sqrt{D}$. Значит, дискриминант первого уравнения $D_1=(p-1)^2-4q=4{,}5$, а второго — $D_2=(p+1)^2-4q=2$. Вычитая из второго равенства первое, имеем $4p=-2{,}5$, то есть $p=-\frac{5}{8}$. (Для справки: $q=-\frac{119}{256}$.)

Теперь поймём, что требуется найти. Абсциссы точек пересечения с прямой $y=2x$ равны корням уравнения $f(x)-2x=0$, а разность между этими абсциссами равна корню дискриминанта. Дискриминант же равен

$D_3=(p-2)^2-4q=p^2-4p+4-4q=(p^2-2p+1-4q)-2p+3=D_1-3b+3=4{,}5+2\cdot\frac{5}{8}+3=\frac{35}{4}$.

Расстояние между точками пересечения является гипотенузой треугольника, меньший катет которого равен $\sqrt{\frac{35}{4}}$, а больший вдвое больше, то есть оно равно $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Критерии. Посчитан коэффициент p — 3 балла. Посчитан D_3 — ещё 2 балла.

То есть решение, где нашли p и обсчитались в D_3, а дальнейшая логика решения неверная или отсутствует, даёт 4 балла.

А решение, где нашли p и обсчитались в D_3, а дальнейшая логика верна, стоит 5 баллов.

Если ответ $\sqrt{\frac{35}{4}}$ — 6 баллов.

За факт про то, что расстояние в $\sqrt{2}$ раз больше, чем проекция, — 1 балл.

4. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 14 кубиков.

Решение. *Пример.* Уберём из одной грани куба всё, кроме центра, из противоположной грани уберём середины рёбер, а также уберём центры каких-то двух оставшихся противоположных граней.

Оценка. Пусть нам удалось оставить k кубиков так, что они примыкают по n внутренним граням друг к другу, а площадь поверхности та же, что у исходного куба. Тогда $6k - 2n = 54$, то есть $3k = n + 27$. С другой стороны, если получившееся тело связно по граням, то граф, в котором вершины — оставшиеся маленькие кубики, а рёбра — внутренние грани, является связным. Следовательно, $n \geqslant k - 1$ и $2k \geqslant 26$, то есть останется $k \geqslant 13$ кубиков, или будет убрано не более чем $27 - 13 = 14$ кубиков.

Критерии. Если доказана только оценка или приведён только пример, то даётся 3 балла.

5. Сумма пяти натуральных чисел a, b, c, d, e равна 2023. Какое наименьшее значение может принять наибольшая из сумм $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$? (*С. П. Павлов*)

Ответ: 675.

Решение. *Пример.* Рассмотрим такую пятёрку чисел: 673, 2, 673, 2, 673. Их сумма 2023, а каждая из указанных в условии сумм равна 675.

Оценка. Покажем, что наибольшая из сумм не меньше 675. Пусть это не так, и для каких-то пяти натуральных чисел наибольшая из этих сумм не превосходит 674. Значит, не превосходит 674 и сумма $a + b$, и сумма $c + d$. Но поскольку $a + b + c + d + e = 2023$, то число e не менее 675. Но тогда сумма $d + e$ не меньше 676. Полученное противоречие завершает доказательство.

6. На сейфе есть 20 рубильников, расположенных в ряд. Каждый из них может находиться в положении 0 или 1. Сами переключатели скрыты, можно лишь давать сейфу следующие команды:
а) переключить одновременно два соседних рубильника;
б) переключить одновременно два рубильника, между которыми есть ровно один рубильник.
Если все рубильники окажутся в положении 1, сейф откроется автоматически. Начальное положение рубильников неизвестно, но известно, что количество «нулей» и «единиц» одинаково. Можно ли открыть сейф? (*О. А. Пяйве*)

Решение. Решим задачу следующим образом: перечислим все возможные исходные положения рубильников. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_N$ — их список. Будем по очереди (для k от 1 до N) предполагать, что рубильники исходно находятся в положении s_k, и проделывать действия, которые — если это действительно так — переведут рубильники в положение «все единицы». Если же в результате этих действий сейф не открылся — значит, наше предположение было неверным; тогда мы проделываем все действия в обратном порядке (возвращаясь к исходному положению), после чего переходим к следующему k.

Итак, осталось научиться из данного положения s_k, в котором 10 нулей и 10 единиц, получать положение со всеми единицами. Что ж, пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{10}$ — номера позиций, на которых в строке s_k стоят нули. Тогда переключение пар рубильников $(i_1,\, i_1+1)$, (i_1+1, i_1+2), …, (i_2-1, i_2) приведёт к тому, что первые два нуля заменятся единицами (а между ними так и останутся единицы). Аналогичным образом следующие нули тоже заменяются на единицы.

Замечание. Мы ни разу не воспользовались второй из операций — переключением рубильников, расположенных через один (к тому же она в любом случае получается комбинацией двух операций первого типа).

Критерии. Решение, в котором предполагается, что известно исходное положение рубильников, заведомо неверно (даёт 0 баллов).

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Решение. Умножим обе части уравнения на 4 и прибавим к ним по 16. Получившееся уравнение запишем в виде $(xy+4)^2 - (2x+2y-xy)^2 = 20$. Разложим левую часть на множители и поделим уравнение на 4. Приходим к равенству $(2+x+y)(xy+2-x-y) = 5$. Рассматривая 4 варианта для значений выражений в скобках (-5 и -1, -1 и -5, 1 и 5, 5 и 1), находим пары (x, y): $(-5, 2), (2, -5), (1, 2), (2, 1)$.

Критерии. Только найдены 4 ответа (без обоснования, что других нет) — 2 балла. Только какие-то два ответа — 1 балл.

Решение, приводящее только к одной паре ответов — 4 балла.