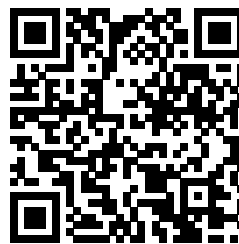




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. У n -значного числа первые две его цифры различаются на 1, вторая и третья — на 2, ..., предпоследняя и последняя — на $n-1$, последняя и первая — на n . При каком наибольшем n такое возможно? (С. П. Павлов)

Ответ: $n = 8$.

Решение. Так как разница между цифрами не превосходит 9, то $n \leq 9$. Если бы такое девятизначное число существовало, то оно бы начиналось на 9 и заканчивалось на 0, причём если выписать чётности его цифр, получится последовательность нччннччнн из условия на соседние цифры — противоречие. Восьмизначное число с указанным свойством существует: 12 473 829 (на самом деле есть ещё два: 87 526 170 и 98 637 281).

Критерии. Пример — 3 балла, оценка — 2 балла за $n \leq 9$ и ещё 2 балла за $n \neq 9$.

2. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (А. А. Теслер)

Ответ: 1000.

Решение. Пусть P — величина приза, S — величина штрафа (по модулю), n — количество вариантов ответ. Тогда можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{P}{n} - \frac{S(n-1)}{n} = 100, \\ \frac{P}{n-1} - \frac{S(n-2)}{n-1} = 200, \\ \frac{P}{n-2} - \frac{S(n-3)}{n-2} = 400, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{P+S}{n} = 100+S, & (1) \\ \frac{P+S}{n-1} = 200+S, & (2) \\ \frac{P+S}{n-2} = 400+S. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе, получаем:

$$\begin{cases} (P+S) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 100 \\ (P+S) \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n-1)} : \frac{1}{(n-1)(n-2)} = 1:2.$$

Значит, $n(n-1) = 2(n-1)(n-2)$, и поскольку $n > 1$ (у Кати изначально было как минимум три возможных варианта ответа), то $n = 4$. Подставляя в (1) и (2), получаем: $P + S = 400 + 4S = 600 + 3S$, откуда $S = 200, P = 1000$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

3. Дана фраза:

$\square\square\square$ -гранная пирамида имеет:

- столько же вершин, сколько $\square\square\square$ -гранная призма,
- столько же рёбер, сколько $\square\square\square$ -гранная призма,
- и столько же граней, сколько $\square\square\square$ -гранная призма.

Сколько способов вписать в каждый квадрат по цифре так, чтобы получить верное утверждение? Напомним, что натуральное число не может начинаться с нуля. (А. А. Теслер)

Решение. Заметим, что n -гранная пирамида имеет n вершин и $2(n-1)$ рёбер, а n -гранная призма — $2(n-2)$ вершины и $3(n-2)$ ребра. Таким образом, если вместо пропусков подставить по порядку трёхзначные числа x, y, z, w , то $x = 2(y-2)$, $2(x-1) = 3(z-2)$ и $x = w$. Тогда $2(2(y-2)-1) = 3(z-2)$, или же $4(y-1) = 3z$. Следовательно, можно сделать замену $y = 3k + 1, z = 4k, x = w = 6k - 2$, где k — целое число. Трёхзначность исходных чисел равносильна тому, что $33 \leq k \leq 166$.

Ответ: $166 - 33 + 1 = 134$ варианта.

Критерии. Если слово « n -гранная» всюду трактуется как « n -угольная» (ответ тоже равен 134), оценка не снижается.

Если участник путает вершины, рёбра и грани, то не больше 2 баллов.

За правильно составленную систему уравнений даётся 2 балла.

4. Дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых эти стороны касаются вписанной окружности. Пусть отрезок B_2C_2 имеет с окружностью, вписанной в $\triangle AB_1C_1$, a общих точек; A_2C_2 с окружностью, вписанной в $\triangle BA_1C_1$ — b общих точек; A_2B_2 с окружностью, вписанной в $\triangle CA_1B_1$ — c общих точек. Найдите максимальное значение числа $a + b + c$. (Ю. Э. Нагуманов)

Ответ: 4.

Решение. Заметим, что в равностороннем треугольнике значение — 3. Если он не равносторонний, то пусть наименьшая сторона — AC . Для удобства введём обозначения $x = BC, y = CA, z = AB$. Сделаем гомотегию в B с коэффициентом 2, тогда вписанная окружность $\triangle BA_1C_1$ перейдёт во вписанную окружность $\triangle ABC$. Пусть A_2 переходит в A_3 , а C_2 в C_3 . $BA_2 = BC_2 = \frac{x+z-y}{2}$. Значит, $BA_3 = BC_3 = x + z - y$. Так как $y \leq \min(x, z)$, то $BA_3 \geq x$ и $BC_3 \geq z$, причём одно из неравенств строгое (иначе треугольник окажется равносторонним). Значит, A_3C_3 не пересекает вписанную окружность, так что $b = 0$ и $a + c \leq 4$.

В качестве примера можно взять треугольник с длинами сторон $x = z > y$. Для него очевидно, что $a = c = 2$: отрезки B_2C_2 и B_2A_2 исходят из вершины $B_2 = B_1$ треугольников $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle CA_1B_1$, причём их вторые концы лежат строго внутри противоположных сторон, так как $BA_2 = BC_2 > \frac{x}{2}$.

Критерии. За оценку даётся 4 балла, за пример — 3. Если в оценке не рассмотрены равнобедренные или равносторонние треугольники, снимается балл.

5. Коля выписал каждый натуральный делитель числа 2025^n по одному разу, после чего покрасил некоторые из них в красный цвет, а остальные — в синий. При этом он действовал так, чтобы разность между суммой всех красных делителей и суммой всех синих

делителей оказалась минимально возможным (при данном n) положительным числом. Какими могут оказаться две последние цифры этой разности? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (М. В. Карлукова)

Ответ: 1, 09, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Решение. Если $n = 0$, то получается разность 1, так что дальше будем рассматривать случай $n > 0$. Сумма всех делителей числа 2025 равна $(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{4n})(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{2n}) = (1 + 120(1 + 81 + \dots + 81^{n-1}))(1 + 30(1 + 25 + \dots + 25^{n-1})) \equiv 1 + 120n + 30(6 + 5n) \equiv 81 + 70n \pmod{100}$. Теперь заметим, что исходя из формулы суммы геометрической прогрессии, сумма делителей меньше, чем $(3^{4n} \cdot 3/2) \cdot (5^{2n} \cdot 5/4) = 2025^n \cdot 15/8$. Значит, максимальный делитель (само число 2025^n) превосходит сумму остальных, поэтому для получения минимального положительного результата перед ним должен стоять плюс, а перед остальными делителями минус. Получается, что ответ имеет вид $50 - 81 - 70n \pmod{100} \in \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99\}$. Заметим, разность больше $2025/8 > 9$, то есть по крайней мере двузначная.

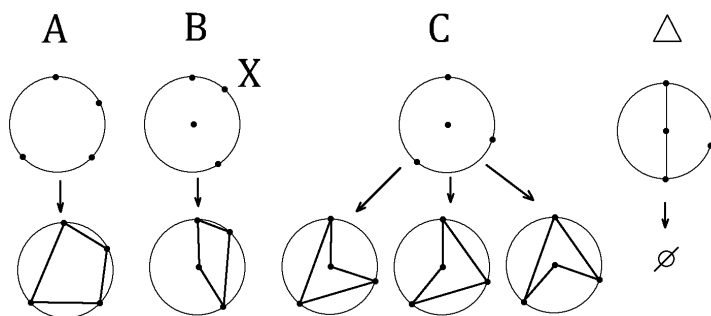
Критерии. За доказательство того, что 2025^n больше суммы остальных делителей, даётся 2 балла. Ещё 5 ставится за нахождение ответа, когда в один из цветов покрашено только 2025^n . Если не рассмотрен случай $n = 0$ или не доказано, что разность не может быть равна 9, баллы не снимаются.

6. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (А. А. Теслер)

Решение. Заметим, что ответ — это $A + B + 3C$, где A — количество четвёрок вершин 100-угольника, B — это количество троек вершин 100-угольника, которые вместе с центром образуют выпуклый четырёхугольник, а C — количество троек вершин 100-угольника, для которых центр лежит строго внутри образованного ими треугольника (тогда через них и центр можно провести 3 невыпуклых четырёхугольника).

Ясно, что $A = C_{100}^4$ и $B + C = C_{100}^3 - \Delta$, где $\Delta = 50 \cdot 98$ — количество способов выбрать пару противоположных вершин 100-угольника и ещё одну вершину (такие способы порождают треугольник, а не четырёхугольник).



Наконец, $B = 100 \cdot C_{49}^2$, так как любая такая тройка однозначно задаётся вершиной, несоседней с центром 100-угольника (на рисунке X), а также расстояниями от этой вершины до двух других.

Итого есть $C_{100}^4 + 3C_{100}^3 - 3 \cdot 50 \cdot 98 - 2 \cdot 100 \cdot C_{49}^2 = 4\,156\,425$ вариантов.

Критерии. Ответ $C_{101}^4 - 0$ баллов. 1 балл, если замечено, что надо вычесть случаи, когда три точки лежат на одной прямой, и ещё 1 балл, если их количество верно посчитано, что привело к ответу $A + B + C = 4\,078\,025$ (возможно, недосчитанному).

Также +1 балл за указание, что точки в невыпуклом положении дают больше одного четырёхугольника. Остальные баллы даются за правильный подсчёт. Если получен правильный ответ в виде арифметического выражения, но не посчитан до конца, снимается 1 балл.

Если в целом решение верное, но считаются также вырожденные четырёхугольники с вершинами в центре, паре противоположных вершин и ещё в одной точке, баллы не снимаются (ответом будет 4 161 325).