

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (А. А. Теслер)

Ответ: 1000.

Решение. Пусть P — величина приза, S — величина штрафа (по модулю), n — количество вариантов ответа. Тогда можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{P}{n} - \frac{S(n-1)}{n} = 100, \\ \frac{P}{n-1} - \frac{S(n-2)}{n-1} = 200, \\ \frac{P}{n-2} - \frac{S(n-3)}{n-2} = 400, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{P+S}{n} = 100 + S, & (1) \\ \frac{P+S}{n-1} = 200 + S, & (2) \\ \frac{P+S}{n-2} = 400 + S. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе, получаем:

$$\begin{cases} (P+S) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 100 \\ (P+S) \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{n(n-1)} : \frac{1}{(n-1)(n-2)} = 1 : 2.$$

Значит, $n(n-1) = 2(n-1)(n-2)$, и поскольку $n > 1$ (у Кати изначально было как минимум три возможных варианта ответа), то $n = 4$. Подставляя в (1) и (2), получаем: $P + S = 400 + 4S = 600 + 3S$, откуда $S = 200$, $P = 1000$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

2. Существует ли 2025-значное натуральное число без нулей в десятичной записи, которое увеличивается в 4 раза, если записать его задом наперёд? (С. П. Павлов)

Ответ: Да, существует — например, $21 \overline{99 \dots 99} 78$.

2021 девятка

Решение. Легко проверить, что указанное число подходит: оно равно $22 \cdot 10^{2023} - 22$, а при записи задом наперёд — $8799 \dots 9912 = 88 \cdot 10^{2023} - 88$.

Опишем возможный метод поиска такого числа. Обозначим его $\overline{abc \dots xyz}$.

Тогда $\overline{abc \dots xyz} \cdot 4 = \overline{zyx \dots cba}$. Значит, $z \geq 4$, $\overline{abc} < 250$, то есть $a \in \{1; 2\}$. В то же время $\overline{ba}$ кратно 4, значит, a чётно. Поэтому $a = 2$. Также $\overline{yz} \cdot 4$ кончается на 2 при $z \in \{3; 8\}$; поскольку $z \geq 4$, то $z = 8$.

Далее из равенства $\overline{\dots y8} \cdot 4 = \overline{\dots b2}$ по цифре y можно однозначно определить цифру b , которая к тому же должна быть нечётная и меньше 5. Получаются варианты $23 \dots 08 \cdot 4 = 80 \dots 32$ и $21 \dots 78 \cdot 4 = 87 \dots 12$, из которых подходит только второй (в первом $\overline{ab \dots yz} \cdot 4 > \overline{zy \dots ba}$).

Аналогичным образом пытаюсь найти c и x , получаем два «перспективных» варианта: $217 \dots 178$ и $219 \dots 978$. Развивая второй вариант (устроенный более простым образом), можно понять, что все числа вида $2199 \dots 9978$ подходят.

Примечание. Существуют и другие такие числа, например, число, состоящее из 405 блоков вида 21978 (и другие похожие примеры).

Критерии. Для полного решения достаточно приведённого примера без каких-либо пояснений. Если найдены одна или две цифры с краёв, ставится 1 или 2 балла.

3. Решите уравнение в целых числах: $x = x^2 + xy + y^2 + 2y + 2$. (П. Д. Муленко)

Ответ: $(1, -1)$, $(1, -2)$, $(2, -2)$.

Решение. Перенесём x вправо: $x^2 + xy + y^2 + 2y + 2 - x = 0$.

Домножим на два и переставим слагаемые: $-2x + 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 = 0$.

Добавим к обеим частям уравнения 1 и разделим оба квадрата на два слагаемых: $1 - 2x + x^2 + x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 = 1$.

Таким образом, каждая тройка слагаемых является полным квадратом: $(x - 1)^2 + (x + y)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Так как x и y — целые, каждое из слагаемых в левой части является целым неотрицательным числом. Тогда их сумма может быть равна 1 только если одно из слагаемых равно 1, а два остальных равны 0.

В случае $x = 1$, $x = -y$ получаем $y + 2 = 1$, подходит. Если $x = 1$, $y = -2$, то $x + y = -1$, тоже подходит. Наконец, при $y = -2$, $x = -y$ получаем $x - 1 = 1$, оно тоже подходит.

Критерии. Если доказана конечность количества решений (например, уравнение сведено к виду «сумма квадратов равна константе»), то ставится 2 балла. Если получено равенство $(1 - x)^2 + (x + y)^2 + (y + 2)^2 = 1$, то даётся ещё 1 балл. За угаданные решения (без обоснования, что других нет) не больше 2 баллов.

4. Назовём *экономичностью* многогранника отношение его объёма к площади поверхности. Можно ли разрезать правильный тетраэдр экономичностью E на 5 частей, сумма экономичностей которых равна $3E$? (А. А. Теслер)

Ответ: да.

Решение. Отрежем от каждой вершины тетраэдра по маленькому тетраэдру с ребром вдвое меньшим, чем у исходного. У каждого маленького тетраэдра объём в 8 раз меньше, чем у исходного, а площадь поверхности — только в 4 раза, поэтому экономичность

каждого из них равна $E/2$. В середине останется октаэдр, у которого и объём, и площадь поверхности вдвое меньше, чем у исходного тетраэдра, поэтому его экономичность равна E . Действительно, поверхность октаэдра состоит из 8 треугольников, а исходного тетраэдра — из $4 \cdot 4 = 16$ таких же треугольников. А объём октаэдра равен $V - 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$, где V — объём тетраэдра.

Итого сумма экономичностей равна $E + 4 \cdot \frac{E}{2} = 3E$.

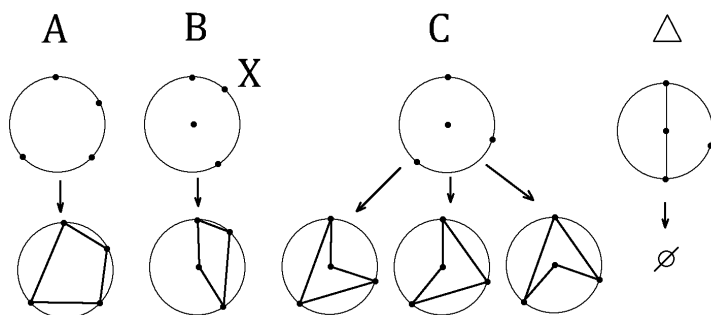
Критерии. 1 балл за указание, что экономичность тетраэдра с вдвое меньшим ребром равна $\frac{E}{2}$ или что экономичность пропорциональна коэффициенту подобия.

5. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (А. А. Теслер)

Решение. Заметим, что ответ — это $A + B + 3C$, где A — количество четвёрок вершин 100-угольника, B — это количество троек вершин 100-угольника, которые вместе с центром образуют выпуклый четырёхугольник, а C — количество троек вершин 100-угольника, для которых центр лежит строго внутри образованного ими треугольника (тогда через них и центр можно провести 3 невыпуклых четырёхугольника).

Ясно, что $A = C_{100}^4$ и $B + C = C_{100}^3 - \Delta$, где $\Delta = 50 \cdot 98$ — количество способов выбрать пару противоположных вершин 100-угольника и ещё одну вершину (такие способы порождают треугольник, а не четырёхугольник).



Наконец, $B = 100 \cdot C_{49}^2$, так как любая такая тройка однозначно задаётся вершиной, несоседней с центром 100-угольника (на рисунке X), а также расстояниями от этой вершины до двух других.

Итого есть $C_{100}^4 + 3C_{100}^3 - 3 \cdot 50 \cdot 98 - 2 \cdot 100 \cdot C_{49}^2 = 4\,156\,425$ вариантов.

Критерии. Ответ $C_{101}^4 - 0$ баллов. 1 балл, если замечено, что надо вычесть случаи, когда три точки лежат на одной прямой, и ещё 1 балл, если их количество верно посчитано, что привело к ответу $A + B + C = 4\,078\,025$ (возможно, недосчитанному).

Также +1 балл за указание, что точки в невыпуклом положении дают больше одного четырёхугольника. Остальные баллы даются за правильный подсчёт. Если получен правильный ответ в виде арифметического выражения, но не посчитан до конца, снимается 1 балл.

Если в целом решение верное, но считаются также вырожденные четырёхугольники с вершинами в центре, паре противоположных вершин и ещё в одной точке, баллы не снимаются (ответом будет 4 161 325).

6. На плоскости отмечены две точки A и B . Андрей играет в такую игру: на каждом шаге он выбирает пару уже отмеченных точек, мысленно строит правильный пятиугольник на них как на соседних вершинах, после чего отмечает на плоскости три остальные его вершины. Сможет ли Андрей отметить середину отрезка AB ? (Е. Ю. Воронецкий)

Ответ: нет.

Решение. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AE}$ и $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне (положительный корень уравнения $\varphi^2 = \varphi + 1$, также известен как золотое сечение).

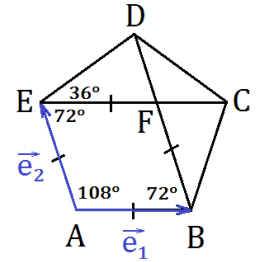
При повороте на 108° по направлению от $\vec{e}_1$ в $\vec{e}_2$ вектор $\vec{e}_1$ переходит

в $\vec{e}_2$, а $\vec{e}_2$ (см. рисунок) — в вектор

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}) + \overrightarrow{BA} = (-\varphi + 1) \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 + (1 - \varphi) \vec{e}_2.$$

Поскольку поворот сохраняет сложение векторов и умножение на число, то вектор вида $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ перейдёт в вектор

$$a\vec{e}_2 + b(-\vec{e}_1 + (1 - \varphi)\vec{e}_2) = -b\vec{e}_1 + (a + (1 - \varphi)b)\vec{e}_2.$$



Будем называть вектор хорошим, если он имеет вид $(p + q\varphi)\vec{e}_1 + (r + s\varphi)\vec{e}_2$ для некоторых $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Ясно, что сумма или разность хороших векторов — тоже хороший вектор.

Заметим, что при повороте на 108° хороший вектор переходит в хороший:

$$(p + q\varphi)\vec{e}_1 + (r + s\varphi)\vec{e}_2 \text{ переходит в } (-r - s\varphi)\vec{e}_1 + (p + q\varphi + r + s\varphi - r\varphi - s\varphi^2)\vec{e}_2 = (-r - s\varphi)\vec{e}_1 + ((p + r - s) + (q - r)\varphi)\vec{e}_2, \text{ поскольку } \varphi^2 = \varphi + 1.$$

Теперь ясно, что если в правильном пятиугольнике $P_1P_2P_3P_4P_5$ вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ хороший, то $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$, $\overrightarrow{P_4P_5}$, $\overrightarrow{P_5P_1}$ хорошие (ведь они получаются из $\overrightarrow{P_1P_2}$ одним или несколькими поворотами на 108°). Значит, и все векторы вида $\overrightarrow{P_iP_j}$ хорошие (как суммы хороших векторов).

Легко видеть, что для всякой получаемой в процессе игры точки X вектор $\overrightarrow{AX}$ — хороший. Докажем это по индукции. Действительно, изначальные векторы $\overrightarrow{AA}$ и $\overrightarrow{AB}$ хорошие. Если же X — вершина пятиугольника, построенного по точкам K и L , то $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$ хорошие, поэтому их разность $\overrightarrow{KL}$ хорошая, вектор $\overrightarrow{KX}$ хороший (см. предыдущий абзац), а значит, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KX}$ хороший.

С другой стороны, пусть M — середина AB . Если её можно построить, то вектор $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{e}_1$ хороший, то есть равен $(p + q\varphi)\vec{e}_1$ (коэффициент при $\vec{e}_2$ обязан обнуляться, так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны). Однако если $q = 0$, то $p + q\varphi$ целое, а если $q \neq 0$, то иррациональное, то есть $p + q\varphi \neq \frac{1}{2}$.