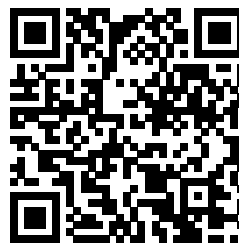




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят.

(С. П. Павлов, П. Д. Муленко)

Ответ: 1, 6.

Решение. Очевидно, первый ученик может написать цифру 1, так как тогда больше никто не сможет походить.

В ином случае ему надо написать такую цифру, чтобы после можно было написать ещё 6 цифр. Это не может быть 2, 3, 5 или 7, так как они простые, и после них удастся написать только 1. Это не может быть 4 или 8, так как после них получится написать только 1, 2 и вторую из этой пары цифр (например, $4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 1$). По той же причине не подходит цифра 9, после которой получится написать только 1 и 3.

Остаётся цифра 6, написав которую, первый ученик сможет походить ещё раз — сразу можно написать 1, 2 и 3; появление цифры 3 разрешает написать 9 ($3 \cdot 6 \div 9$), а появление цифры 2 позволяет написать 4 и 8 ($6 \cdot 2 \div 4$, $6 \cdot 4 \div 8$). Таким образом, после цифры 6 на доске появятся цифры 1, 2, 3, 4, 8, 9 в каком-то порядке, последнюю из которых (не по порядку, но по количеству) и напишет первый игрок. Более того, другие цифры (5 и 7) не смогут быть написаны, то есть второй ход первого игрока окажется последним.

Критерии. Предъявлена цифра 1 и больше ничего — 0 баллов.

Предъявлена только цифра 6 и больше ничего — 1 балл.

Предъявлены обе цифры (1, 6) и больше ничего — 2 балла.

Предъявлены только цифры без объяснения, причём кроме 1 и 6 есть посторонние — 0 баллов.

В целом верное решение, но забыта цифра 1 как второй вариант — не более 6 баллов.

Забыта цифра 6 как второй вариант — не более 4 баллов.

При наличии объяснения в ответ попали посторонние цифры — не более 3 баллов.

2. Олеся нарисовала на доске 6 точек, соединила некоторые из них отрезками, и рядом с каждой точкой написала количество отрезков, которые из этой точки выходят. После этого она сообщила 5 утверждений:

(а) Только у одной точки стоит цифра 4.

- (b) Цифра 2 написана ровно у двух точек.
- (c) Тройка встречается ровно один раз.
- (d) Только у одной точки стоит 0.
- (e) Половина написанных цифр — двойки.

Какие числа могла написать Олеся, если ровно одно из утверждений неверно?

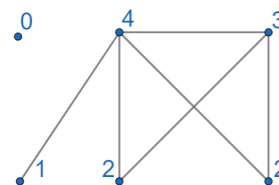
Укажите все варианты, объясните, почему возможны только они, а также подтвердите каждый вариант примером. (П. Д. Муленко)

Ответ: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Решение. Утверждения (b) и (e) друг другу противоречат. При этом, если ложно утверждение (b), то нам даны все шесть чисел Олеси (0, 2, 2, 2, 3, 4), но тогда сумма этих чисел должна быть равна удвоенному количеству отрезков, а в данном случае она нечётна.

Значит, ложно утверждение (e), и нам известны пять чисел Олеси: 4, 3, 2, 2, 0. Из того же рассуждения про чётность суммы этих чисел, последнее число должно быть нечётным. Оно не может быть равно 5, так как тогда соответствующая точка должна быть соединена со всеми остальными, но среди точек также присутствует изолированная (то есть не соединённая ни с кем). Более того, это последнее число не может быть равно 3, так как тогда Олеся дважды написала бы число 3, что противоречит утверждению (c).

Таким образом, это число может равняться только 1, и единственный возможный полный набор чисел выглядит так: 4, 3, 2, 2, 1, 0.



Критерии. Указан верный набор чисел — 1 балл.

Предъявлен верный пример — +1 балл.

Показано, что утверждения b и e противоречат друг другу и сделан вывод, что ложно одно из них — +1 балл.

Доказано, что случай с ложным утверждением b невозможен — +2 балла.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 5 — +1 балл.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 3 — +1 балл.

3. На прямой отметили 4 точки и измерили длины всех возможных отрезков с вершинами в этих точках. Оказалось, что длина отрезка между средними точками равна 4 см, а сумма всех длин равна 31 см. Найдите длину самого большого отрезка из измеренных.

(П. Д. Муленко)

Ответ: 9 см.

Решение. Назовём точки слева направо A, B, C, D ; также обозначим длину отрезка между двумя левыми точками за x , а между двумя правыми точками за y :

$$A \quad \leftarrow x \rightarrow \quad B \quad \leftarrow 4 \rightarrow \quad C \quad \leftarrow y \rightarrow \quad D.$$

Тогда общая сумма длин всех 6 отрезков будет равна

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + AC + BD + AD &= \\ &= x + 4 + y + (x + 4) + (4 + y) + (x + 4 + y) = \\ &= 3x + 4 \cdot 4 + 3y = 31, \end{aligned}$$

откуда $3x + 3y = 15$ см или $x + y = 5$ см, а тогда длина самого большого отрезка между крайними точками AD равна $x + 4 + y = 5 + 4 = 9$ см.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Приведён ответ с примером, но без решения — 3 балла.

Не учтено, что AD — тоже отрезок (ищется максимум между AB , BC и CD) — не более 3 баллов.

4. Найдите количество семизначных чисел, кратных 12, в записи которых используются только единицы и двойки, причём никакие две двойки не стоят рядом.

(Л. С. Корешкова)

Ответ: 5.

Решение. Чтобы число делилось на $12 = 3 \cdot 4$, оно, в том числе, должно оканчиваться двузначным числом, делящимся на 4. Из цифр 1 и 2 можно составить только одно такое двузначное число (а именно 12).

Значит, две последние цифры числа обязательно 12. При этом всё число должно делиться ещё и на 3, то есть сумма цифр должна быть кратна 3. Последние две цифры в сумме равны 3, значит, первые 5 в сумме должны делиться на 3.

Пять цифр 1 или 2 в сумме могут быть равны любому числу от $1 \cdot 5 = 5$ до $2 \cdot 5 = 10$, значит, нам подойдут суммы в $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$ и $9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$. Второй случай не подходит, так как двойки будут стоять рядом, а первый даёт 5 возможных чисел в зависимости от расположения двойки.

Критерии. Обосновано, что число оканчивается на 12 — +2 балла.

Не учтено, что двойки не стоят рядом, поэтому не исключен второй случай — не более 4 баллов.

Решение перебором засчитывается целиком, если объяснено, почему рассмотрены все возможные числа (например, числа расставлены в понятном порядке). Если же какие-то числа проверены не были — не более 5 баллов.

5. В равенстве $* + ** + *** = ****$ (сумма однозначного, двузначного и трёхзначного чисел равна четырёхзначному) расставлены вместо звёздочек все 10 цифр по одному разу так, что равенство верно. Чему может быть равно четырёхзначное число? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

(С. П. Павлов)

Ответ: 1026, 1035, 1053, 1062.

Решение. Обозначим цифры всех четырёх чисел буквами: $a + \overline{bc} + \overline{def} = \overline{ghij}$.

Если $d < 9$, то трёхзначное число меньше 900, и сумма чисел в левой части не более $4 + 75 + 896 = 975 < 1000$. Значит, $d = 9$.

Даже если все цифры в левой части равны 9, то $9 + 99 + 999 = 1107$, то есть цифра тысяч в правой части $g = 1$, а тогда цифра сотен $h = 0$:

$$a + \overline{bc} + \overline{9ef} = \overline{10ij}.$$

Вычитая 900 из обеих частей равенства, получаем

$$a + \overline{bc} + \overline{ef} = \overline{1ij}.$$

Теперь можно воспользоваться признаком делимости на 9. Обе части должны давать один и тот же остаток, то есть суммы цифр в левой и правой частях должны давать один и тот же остаток:

$$(a + b + c + e + f) - (1 + i + j) : 9.$$

Более того, если мы сложим левую и правую части, то используем все цифры от 1 до 8, то есть сумма цифр будет равна 36. Таким образом, и разность частей уравнения делится на 9, и их сумма тоже делится на 9. Такое возможно, только если каждая из частей уравнения делится на 9.

$\overline{1ij}$ будет делиться на 9, если $1 + i + j = 9$ (так как цифра 9 уже занята, сумма 18 недостижима), или $i + j = 8$. Так как цифры 0 и 1 тоже заняты, и $i \neq j$, то эти цифры равны или 2 и 6 в произвольном порядке, или 3 и 5 в произвольном порядке. Значит, четырёхзначное число может быть равно 1026, 1035, 1053 и 1062. Каждое из них действительно может стоять в правой части данного равенства, что подтверждается примерами: $3 + 45 + 978 = 1026$, $2 + 46 + 987 = 1035$, $2 + 64 + 987 = 1053$, $3 + 74 + 985 = 1062$.

Критерии. Обосновано, что четырёхзначное вылядит как $\overline{10xy} - +2$ балла.

Замечание о делимости левой и правой частей на 9 — 1 балл.

Каждый найденный ответ — +1 балл.

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (С. П. Павлов)

Ответ: 60.

Решение. Выберем 6 клеток таблицы (см. слева) так, что если отметить клетки, соседние с ними, то всё поле будет покрыто один раз (см. в центре; номер клетки показывает, с какой из ранее выбранных она соседствует).

1	2		
			3
			4
6	5		

2	1	2	3
1	2	3	4
6	5	4	3
5	6	5	4

10	10	0	0
0	0	0	10
0	0	0	10
10	10	0	0

В каждой группе клеток с одинаковым номером сумма равна 10, то есть сумма всех чисел в таблице будет равна 60. В качестве примера этой суммы достаточно написать 10 в изначально выбранные шесть клеток и 0 во все остальные клетки (см. справа).

Критерии. Приведен правильный ответ — 1 балл.

Приведен правильный ответ с примером — 2 балла.

Приведено верное решение без примера — 7 баллов.