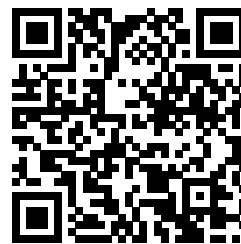




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят.

(С. П. Павлов, П. Д. Муленко)

Ответ: 1, 6.

Решение. Очевидно, первый ученик может написать цифру 1, так как тогда больше никто не сможет походить.

В ином случае ему надо написать такую цифру, чтобы после можно было написать ещё 6 цифр. Это не может быть 2, 3, 5 или 7, так как они простые, и после них удастся написать только 1. Это не может быть 4 или 8, так как после них получится написать только 1, 2 и вторую из этой пары цифр (например, $4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 1$). По той же причине не подходит цифра 9, после которой получится написать только 1 и 3.

Остаётся цифра 6, написав которую, первый ученик сможет походить ещё раз — сразу можно написать 1, 2 и 3; появление цифры 3 разрешает написать 9 ($3 \cdot 6 \div 9$), а появление цифры 2 позволяет написать 4 и 8 ($6 \cdot 2 \div 4$, $6 \cdot 4 \div 8$). Таким образом, после цифры 6 на доске появятся цифры 1, 2, 3, 4, 8, 9 в каком-то порядке, последнюю из которых (не по порядку, но по количеству) и напишет первый игрок. Более того, другие цифры (5 и 7) не смогут быть написаны, то есть второй ход первого игрока окажется последним.

Критерии. Предъявлена цифра 1 и больше ничего — 0 баллов.

Предъявлена только цифра 6 и больше ничего — 1 балл.

Предъявлены обе цифры (1, 6) и больше ничего — 2 балла.

Предъявлены только цифры без объяснения, причём кроме 1 и 6 есть посторонние — 0 баллов.

В целом верное решение, но забыта цифра 1 как второй вариант — не более 6 баллов.

Забыта цифра 6 как второй вариант — не более 4 баллов.

При наличии объяснения в ответ попали посторонние цифры — не более 3 баллов.

2. В нашей семье все родились в один и тот же день и месяц, но в разные годы. Мой братик на 14 лет младше меня, а моя сестра на 3 года меня старше. Я родился, когда маме было 27. Папа посчитал наш средний возраст (без учёта себя) и получил 21. Сколько лет

каждому из нас?

Примечание. Средний возраст — это отношение суммы возрастов к количеству человек.
(П. Д. Муленко)

Решение. Обозначим возраст героя задачи за x . Тогда возраст его брата равен $x - 14$, его сестры — $x + 3$, а его матери — $x + 27$. Таким образом, сумма их возрастов, делённая на 4, должна быть равна 21:

$$\frac{x + (x - 14) + (x + 3) + (x + 27)}{4} = 21,$$
$$4x + 16 = 21 \cdot 4 = 84,$$
$$x = \frac{84 - 16}{4} = 17.$$

Таким образом, герою задачи — 17 лет, его брату — $17 - 14 = 3$ года, его сестре — $17 + 3 = 20$ лет, и его матери — $17 + 27 = 44$ года.

Критерии. Просто ответ — 2 балла; с проверкой, что он подходит — 3 балла.

Деление не на 4, а на 5 — 3 балла.

3. Учитель попросил своих учеников продемонстрировать свои знания о факториалах. Отличница Маша хорошо знает натуральные числа, поэтому правильно записала число $100!$ как произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.

Троечник Вова знает только нечётные числа, поэтому записал число $100!$ как произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$, пропуская все чётные множители.

А хорошист Олежа решил понять, во сколько раз Машино число больше Вовино, для чего вычислил их частное. Однако Олежа игнорирует нули в конце чисел, считая, что они ничего не значат (иными словами, он как бы «стёр» все нули на концах множителей, написанных ранее ребятами, и сотрёт все нули, которые получатся в конце его собственного произведения).

Какая будет последняя цифра в числе Олежи?
(П. Д. Муленко)

Ответ: 8.

Решение. Если сравнить числа Маши и Вовы и сократить ту дробь, что Олежа хочет подсчитать, останутся только чётные множители от 2 до 100 включительно. При этом Олежа игнорирует нули в конце числа, поэтому среди чисел у него будут 6 якобы нечётных, так как 10, 30, 50, 70, 90 и 100 он читает как 1, 3, 5, 7, 9 и 1. Произведение этих нечётных чисел равно 945.

Помимо этого, остальные круглые числа (20, 40, 60 и 80) Олежа тоже читает неправильно. Их произведение равно $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$, и, если это число умножить на произведение нечётных чисел, произведение будет равно $\dots 80$, и этот ноль Олежа тоже проигнорирует. Теперь в Олежином выражении остались только чётные некруглые множители и один неправильный множитель, оканчивающийся цифрой 8. То есть теперь нам достаточно отслеживать последнюю цифру у всех этих чисел. В каждой десятке есть 4 числа, оканчивающихся чётной ненулевой цифрой, и произведение этих четырёх чисел будет оканчиваться на $\dots 2 \cdot \dots 4 \cdot \dots 6 \cdot \dots 8 = \dots 4$. Таких групп по 4 числа — 10, при этом произведение каждой пары этих групп будет оканчиваться на $\dots 4 \cdot \dots 4 = \dots 6$, то есть произведение всех 10 групп чисел тоже будет оканчиваться на 6. Наконец, умножая на последний, неправильный, множитель, получаем последнюю цифру всего Олежиного произведения: $\dots 6 \cdot \dots 8 = \dots 8$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Потеряны круглые числа — 2 балла.

4. На прямой в некотором порядке отмечены 4 точки: A , B , C и D . Известно, что $AB : BD = 12 : 5$, $AD : BC = 17 : 15$, $DB : DA = 5 : 17$, $DC : BA = 5 : 3$.

(a) Найдите отношение $BC : CD$.

(b) В каком порядке расположены точки?

(П. Д. Муленко)

Ответ: (a) $3 : 4$; (b) C, A, B, D (или наоборот).

Решение. $AD : BC = 17 : 15$, и $DA : DB = 17 : 5$, то есть $BD : BC = 5 : 15 = 1 : 3$.

$BC : BD = 3 : 1 = 15 : 5$, и $AB : BD = 12 : 5$, то есть $BC : AB = 15 : 12$.

$BC : AB = 15 : 12$, и $DC : AB = 5 : 3 = 20 : 12$, то есть $BC : CD = 15 : 20 = 3 : 4$.

Теперь расположим точки. Пусть точка A левее точки B (если наоборот, то мы получим такое же расположение, просто в обратном порядке). $AB : BC = 12 : 15$, поэтому обозначим $AB = 12$, $BC = 15$. То есть точка C или расположена правее точки B ($A \rightarrow B \rightarrow C$), или левее точки A ($C \rightarrow A \rightarrow B$) так, что $CA = 3$.

Теперь используем отношение $AB : CD = 3 : 5$. Так как $AB = 12$, $CD = 20$. Это даёт 4 возможных расположения точек (по 2 в каждом из описанных выше случаев для первых трёх точек):

(a) $A \leftarrow 7 \rightarrow D \leftarrow 5 \rightarrow B \leftarrow 15 \rightarrow C$,

(b) $A \leftarrow 12 \rightarrow B \leftarrow 15 \rightarrow C \leftarrow 20 \rightarrow D$,

(c) $D \leftarrow 20 \rightarrow C \leftarrow 3 \rightarrow A \leftarrow 12 \rightarrow B$,

(d) $C \leftarrow 3 \rightarrow A \leftarrow 12 \rightarrow B \leftarrow 5 \rightarrow D$.

С учётом условия $AD : BC = 17 : 15$ подходит только последний вариант, то есть точки расположены $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D$ или наоборот ($D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$).

Критерии. Решён только пункт (a) — 2 балла.

Разобрана часть случаев пункта (b) — не более 3 баллов.

5. Найдите количество 11-значных чисел, кратных 72, в записи которых используются только единицы и двойки.

(Л. С. Корешкова)

Ответ: 28.

Решение. Чтобы число делилось на $72 = 9 \cdot 8$, оно, в том числе, должно оканчиваться трёхзначным числом, делящимся на 8. Из цифр 1 и 2 можно составить только одно такое число (а именно 112).

Значит, три последние цифры числа обязательно 112. При этом всё число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Последние три цифры в сумме дают $1 + 1 + 2 = 4$, а остальные могут принимать любые значения от $1 \cdot 8 = 8$ до $2 \cdot 8 = 16$, то есть общая сумма цифр может быть от $8 + 4 = 12$ до $16 + 4 = 20$. В данном диапазоне только 18 делится на 9, значит, сумма всех цифр равна 18, и сумма цифр без последних трёх равна 14.

Такая сумма восьми цифр достигается шестью двойками и двумя единицами. Первую единицу можно поставить на любой из 8 разрядов, вторую — на любой из семи оставшихся, после чего остальные 6 разрядов заполняются двойками. При этом каждую расстановку мы посчитали дважды, поэтому окончательное количество чисел равно $8 \cdot 7 : 2 = 28$.

Критерии. Обосновано, что число заканчивается на 112 — 2 балла.

Определена общая сумма цифр — 2 балла.

В целом верное решение, но неправильно посчитано количество единиц и двоек в первых 14 рядах — не более 4 баллов.

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (С. П. Павлов)

Ответ: 60.

Решение. Выберем 6 клеток таблицы (см. слева) так, что если отметить клетки, соседние с ними, то всё поле будет покрыто один раз (см. в центре; номер клетки показывает, с какой из ранее выбранных она соседствует).

1	2		
			3
			4
6	5		

2	1	2	3
1	2	3	4
6	5	4	3
5	6	5	4

10	10	0	0
0	0	0	10
0	0	0	10
10	10	0	0

В каждой группе клеток с одинаковым номером сумма равна 10, то есть сумма всех чисел в таблице будет равна 60. В качестве примера этой суммы достаточно написать 10 в изначально выбранные шесть клеток и 0 во все остальные клетки (см. справа).

Критерии. Приведен правильный ответ — 1 балл.

Приведен правильный ответ с примером — 2 балла.

Приведено верное решение без примера — 7 баллов.