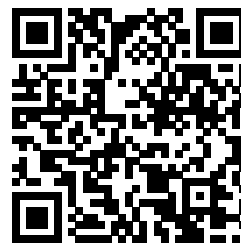




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Олеся нарисовала на доске 6 точек, соединила некоторые из них отрезками, и рядом с каждой точкой написала количество отрезков, которые из этой точки выходят. После этого она сообщила 5 утверждений:

- (a) Только у одной точки стоит цифра 4.
- (b) Цифра 2 написана ровно у двух точек.
- (c) Тройка встречается ровно один раз.
- (d) Только у одной точки стоит 0.
- (e) Половина написанных цифр — двойки.

Какие числа могла написать Олеся, если ровно одно из утверждений неверно?

Укажите все варианты, объясните, почему возможны только они, а также подтвердите каждый вариант примером.

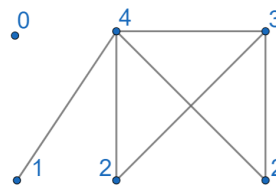
(П. Д. Муленко)

Ответ: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Решение. Утверждения (b) и (e) друг другу противоречат. При этом, если ложно утверждение (b), то нам даны все шесть чисел Олеси (0, 2, 2, 2, 3, 4), но тогда сумма этих чисел должна быть равна удвоенному количеству отрезков, а в данном случае она нечётна.

Значит, ложно утверждение (e), и нам известны пять чисел Олеси: 4, 3, 2, 2, 0. Из того же рассуждения про чётность суммы этих чисел, последнее число должно быть нечётным. Оно не может быть равно 5, так как тогда соответствующая точка должна быть соединена со всеми остальными, но среди точек также присутствует изолированная (то есть не соединённая ни с кем). Более того, это последнее число не может быть равно 3, так как тогда Олеся дважды написала бы число 3, что противоречит утверждению (c).

Таким образом, это число может равняться только 1, и единственный возможный полный набор чисел выглядит так: 4, 3, 2, 2, 1, 0.



Критерии. Указан верный набор чисел — 1 балл.

Предъявлен верный пример — +1 балл.

Показано, что утверждения b и e противоречат друг другу и сделан вывод, что ложно одно из них — +1 балл.

Доказано, что случай с ложным утверждением b невозможен — +2 балла.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 5 — +1 балл.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 3 — +1 балл.

2. Коля выписал все натуральные делители числа 2025^n в некотором порядке и расставил между ними знаки «+» и «−». Потом он вычислил значение полученного выражения. При каких натуральных n у него могло получиться 2026?

(М. В. Карлукова)

Ответ: это невозможно ни при каких натуральных значениях n .

Решение. $2025 = 45^2$, поэтому $2025^n = (45^2)^n = 45^{2n} = (45^n)^2$. Квадраты натуральных чисел имеют нечётное количество делителей, при этом, поскольку число нечётное, все делители будут нечётными числами.

Таким образом, Коля выпишет нечётное количество нечётных чисел. Сумма их всех равна нечётному числу, а смена знака перед произвольным числом x с плюса на минус меняет сумму на $2x$, то есть на чётное значение. Таким образом, Колин результат всегда будет нечётным числом и не сможет быть равен чётному числу 2026.

Критерии. 1 балл за упоминание того, что все делители нечётны, и ещё 2 балла — за указание, что их нечётное количество.

3. Если в трёхзначном числе зачеркнуть среднюю цифру, то оно станет в 13 раз меньше. Чему может быть равно это трёхзначное число? (П. Д. Муленко)

Ответ: 130, 195, 260, 390.

Решение. Представим число как $\overline{abc}$. Тогда после удаления средней цифры оно равно $\overline{ac}$, и оно в 13 раз меньше:

$$\overline{abc} = 13 \cdot \overline{ac}.$$

Распишем оба числа по разрядным слагаемым и упростим выражение:

$$100a + 10b + c = 13 \cdot (10a + c),$$

$$100a + 10b + c = 130a + 13c,$$

$$10b = 30a + 12c,$$

$$5b = 15a + 6c.$$

Правая часть равенства явно делится на 3, значит, цифра b может быть равна 3, 6 или 9 (нулю она не может быть равна, так как тогда и две другие цифры числа равны 0). Перебирая все эти случаи, находим 4 подходящих числа:

$b = 3$: $15 = 15a + 6c$, откуда $a = 1$, $c = 0$ (число 130);

$b = 6$: $30 = 15a + 6c$, откуда $a = 2$, $c = 0$ (число 260);

$b = 9$: $45 = 15a + 6c$, откуда $a = 3$, $c = 0$ (число 390), или $a = 1$, $c = 5$ (число 195).

Критерии. Каждый найденный ответ с проверкой при отсутствии решения — +1 балл.

Каждый потерянный или посторонний ответ при верном ходе решения — -2 балла.

4. Найдите количество 15-значных чисел, кратных 18, в записи которых используются только единицы и двойки, причём никакие две двойки не стоят рядом. (Л. С. Корешкова)

Ответ: 66.

Решение. Чтобы число делилось на $18 = 9 \cdot 2$, оно, в том числе, должно быть чётным, то есть оканчиваться на 2. При этом двойки не могут идти подряд, то есть предпоследняя цифра обязательно равна 1.

Число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Сумма цифр без последних двух может принимать любые значения от $1 \cdot 13 = 13$ до $2 \cdot 13 = 26$, то есть общая сумма цифр может быть от $13 + 3 = 16$ до $26 + 3 = 29$. В данном диапазоне только 18 и 27 делятся на 9, при этом первая сумма достигается тремя двойками и 12-ю единицами, а вторая — тремя единицами и 12-ю двойками.

Второй случай невозможен, так как двойки будут стоять рядом, а в первом необходимо подсчитать количество способов расставить две двойки на 13 первых разрядов (последняя

двойка стоит в конце). Первую можно поставить на любое из 13 мест, а вторую — на любое из 12 оставшихся. Каждый способ мы учли дважды, поэтому всего таких чисел $13 \cdot 12 : 2 = 78$, из которых в 12 числах две двойки стоят рядом, поэтому окончательный ответ равен $78 - 12 = 66$.

Критерии. +16 за обоснование последних двух цифр.

-26 за неисключенный второй случай. (когда сумма цифр равна 27)

-26 за неисключенные числа с подряд идущими двойками.

В целом верное решение, но неправильно посчитано количество единиц и двоек в первых 13 рядах — не более 4 баллов.

5. Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Три из них оказались равны. Обязательно ли четвёртый им равен? (А. А. Теслер)

Ответ: да.

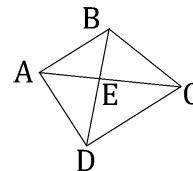
Решение. Обозначим четырёхугольник $ABCD$, а точку пересечения диагоналей — E .

Пусть равны треугольники ABE , BEC и CED , тогда рассмотрим первые два из них.

Если углы $\angle BEA$ и $\angle BEC$ не равны, то, поскольку они смежны, один из них тупой, то есть все три равных треугольника — тупоугольные.

Пусть угол $\angle BEC$ — тупой. Тогда в треугольнике ABE этот угол не может быть между диагоналями (этот угол точно острый, так как смежен тупому углу $\angle BEC$), но и не может быть любым из двух других, так как тогда сторона AB должна быть параллельна одной из диагоналей (что, очевидно, невозможно): если $\angle ABE = \angle BEC$, то $AB \parallel AC$, а если $\angle BAE = \angle BEC$, то $AB \parallel BD$.

Значит, $\angle BEA = \angle BEC = 90^\circ$, а тогда все 4 треугольника, образованные диагоналями, являются прямоугольными. Более того, раз $\triangle ABE = \triangle BEC$, то $AE = EC$, а из равенства треугольников BEC и ECD следует, что $BE = ED$. Это значит, что обе диагонали точкой пересечения поделились пополам, а тогда и четвёртый треугольник AED равен трём другим (а сам четырёхугольник, тем самым, является ромбом).



Критерии. Показано, что в любом ромбе все треугольники равны, и больше никаких рассуждений — 1 балл.

Не объяснено, почему между диагоналями прямой угол — -26.

6. Барон Мюнхгаузен по секрету рассказал, что 9 марта прошлого года, на праздновании дня рождения всех его детей (коих было трое разного возраста), он подарил каждому ребёнку столько пиастров, сколько тому исполнилось лет. Средняя сумма подарка составила 2 пиастра. Более того, 9 марта этого года, празднуя день рождения всех своих детей, он снова подарил каждому ребёнку столько пиастров, сколько тому исполнилось лет, и средний подарок снова составил 2 пиастра. Сколько лет сегодня каждому из детей барона? (П. Д. Муленко)

Ответ: 1, 1, 1, 2, 3, 4.

Решение. Год назад детей было трое, и средний подарок составил 2 пиастра. Значит, сумма возрастов равна $2 \cdot 3 = 6$, при этом было подарено 3 различных количества пиастров, что означает, что детям было 1, 2 и 3 года.

Значит, сейчас им 2, 3 и 4 года, и барон им подарил $2 + 3 + 4 = 9$ пиастров. При этом среднее этих трёх подарков равно $9 : 3 = 3$, а должно быть равно 2. Такое возможно,

только если у барона год назад (сразу после праздника) родились новые дети, каждому из которых он сейчас подарил по 1 пиастру.

Пусть их x человек, тогда всего детей у барона $3 + x$, и подарил он им $9 + x$ пиастров:

$$\frac{9 + x}{3 + x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 + x = 2(3 + x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Итого, всего детей у барона 6, и сейчас им 1, 1, 1, 2, 3 и 4 года.

Примечание. Если считать, что из трёх старших детей кто-то мог умереть в течение года, то это добавляет ещё 5 возможных наборов возрастов: (1, 1, 1, 1); (2); (3, 1); (2, 3, 1); (3, 4, 1, 1, 1).

Критерии. Критерии при авторской трактовке условий:

приведен только ответ — +1 балл;

объяснено, почему исходные возраста детей 1, 2 и 3 года — + 2 балла.