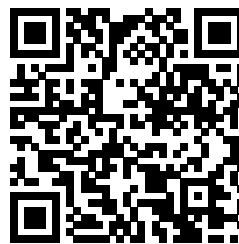




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Коля выписал все натуральные делители числа 2025^n в некотором порядке и расставил между ними знаки «+» и «−». Потом он вычислил значение полученного выражения. При каких натуральных n у него могло получиться 2026? (М. В. Карлукова)

Ответ: это невозможно ни при каких натуральных значениях n .

Решение. $2025 = 45^2$, поэтому $2025^n = (45^2)^n = 45^{2n} = (45^n)^2$. Квадраты натуральных чисел имеют нечётное количество делителей, при этом, поскольку число нечётное, все делители будут нечётными числами.

Таким образом, Коля выпишет нечётное количество нечётных чисел. Сумма их всех равна нечётному числу, а смена знака перед произвольным числом x с плюса на минус меняет сумму на $2x$, то есть на чётное значение. Таким образом, Колин результат всегда будет нечётным числом и не сможет быть равен чётному числу 2026.

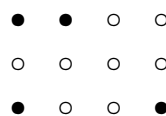
Критерии. 1 балл за упоминание того, что все делители нечётны, и ещё 2 балла — за указание, что их нечётное количество.

2. На клетчатом листе отмечены 12 точек в виде сетки 3×4 . Какое наибольшее количество точек можно выбрать так, чтобы среди расстояний между ними не было равных? (С. П. Павлов)

Ответ: 4.

Решение. Будем считать, что расстояние между соседними (по вертикали или горизонтали) точками равно 1. Тогда полный набор возможных расстояний между двумя точками таков: $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, 2\sqrt{2}, \sqrt{13}$ (8 штук).

Если закрашено 5 точек или более, то всевозможных попарных расстояний между ними не менее $5 \cdot 4/2 = 10$, то есть какие-то из них будут равны. Поэтому можно выбрать не более 4 точек — например, 3 угла и ещё одну точку рядом с одним из углов (см. справа).



Критерии. Оценка — 3 балла, пример — 2 балла. Если из решения (например, из оценки) ясно, что человек владеет теоремой Пифагора, то отдельное обоснование примера не требуется.

3. В нашей семье из 5 человек все родились в один и тот же день и месяц, но в разные годы. Мой братик на 14 лет младше меня, а моя сестра на 3 года меня старше. Я родился, когда маме было 27. Папа посчитал наш средний возраст (без учёта себя) и заявил, что несколько лет назад средний возраст членов семьи (без учёта папы) был такой же, как и сейчас. Найдите все варианты, сколько лет назад так могло быть. (П. Д. Муленко)

Ответ: 6 лет назад или 23 года назад.

Решение. Обозначим возраст героя задачи за x . Тогда возраст его брата равен $x - 14$, его сестры — $x + 3$, и его матери — $x + 27$. Таким образом, средний возраст героев равен

$$\frac{x + (x - 14) + (x + 3) + (x + 27)}{4} = \frac{4x + 16}{4} = x + 4.$$

Теперь рассмотрим эту же семью k лет назад. Очевидно, что возраст каждого из членов семьи был меньше на k , но тогда и средний возраст должен был быть меньше на k . Единственная причина, по которой средний возраст мог оказаться таким же, как сейчас, это *меньшее число в знаменателе дроби*, то есть меньшее количество членов семьи. Действительно, если k лет назад младший брат *ещё не родился*, то средний возраст членов семьи запишется как

$$\frac{(x - k) + (x + 3 - k) + (x + 27 - k)}{3} = \frac{3x + 30 - 3k}{3} = x + 10 - k,$$

тем самым 6 лет назад такое могло произойти (при условии, что младший брат младше 6 лет).

По этой же логике такое могло произойти и ещё раньше, когда не родился главный герой задачи (тогда при подсчёте учитываются только мама и сестра):

$$\frac{(x + 3 - k) + (x + 27 - k)}{2} = \frac{2x + 30 - 2k}{2} = x + 15 - k,$$

то есть равенство средних возможно при $k = 11$. Однако, из условия задачи явным образом следует, что главному герою в настоящее время не менее 14 лет (так как брат на 14 лет младше), поэтому 11 лет назад в семье не могло быть только двое членов, не считая отца.

Наконец, остаётся проверить случай, когда не родился ещё ни один из детей — тогда при подсчёте среднего учитывается только возраст матери: $x + 27 - k = x + 4$, откуда $k = 23$. И этот случай возможен даже с учётом ранее найденного совпадения средних возрастов — раз младшему брату не более 6 лет, то главному герою не более 20, а его сестре не более 23 лет.

Критерии. Каждое найденное число из ответа — +26.

В целом верное решение, но не исключено число 11 — -26.

4. Найдите количество 15-значных чисел, кратных 18, в записи которых используются только единицы и двойки. (Л. С. Корешкова)

Ответ: 455.

Решение. Чтобы число делилось на $18 = 9 \cdot 2$, оно, в том числе, должно быть чётным, то есть оканчиваться на 2. При этом всё число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Сумма цифр без последней может принимать любые значения от $1 \cdot 14 = 14$ до $2 \cdot 14 = 28$, то есть общая сумма цифр может быть от $14 + 2 = 16$ до $28 + 2 = 30$. В данном диапазоне только 18 и 27 делятся на 9, при этом первая сумма достигается тремя двойками и 12-ю единицами, а вторая — тремя единицами и 12-ю двойками.

В первом случае надо выбрать 2 разряда из 14, где будут стоять две двойки (последняя точно стоит в конце), что можно сделать $14 \cdot 13 : 2 = 91$ способом. Во втором случае надо выбрать 3 разряда из 14, где будут стоять единицы, что можно сделать $14 \cdot 13 \cdot 12 : 3! = 364$ способами. Значит, всего подходящих чисел $91 + 364 = 455$.

Критерии. Разобран только один случай из двух — не более 3 баллов.

Не учтено, что на последнем месте обязательно двойка — не более 5 баллов.

Неверно посчитано количество единиц и двоек — не более 4 баллов.

5. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит денежный приз. Изначально Катя планировала выбрать ответ случайным образом.

Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша увеличилось на 600 рублей.

Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша увеличилось ещё на 840 рублей. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения.

(А. А. Теслер)

Ответ: 25200.

Решение. Обозначим величину приза за S , а количество вариантов ответа за n . Так как Катя выбирает ответ случайным образом, вероятность угадать равна $1/n$, то есть изначально математическое ожидание равно S/n .

После исключения варианта А вероятность угадать увеличилась до $\frac{1}{n-1}$, что привело к увеличению ожидаемого выигрыша:

$$\frac{S}{n-1} = \frac{S}{n} + 600. \quad (1)$$

Аналогично, исключив вариант В, Катя ещё увеличила вероятность угадать до $\frac{1}{n-2}$:

$$\frac{S}{n-2} = \frac{S}{n-1} + 840. \quad (2)$$

Выразим из первого уравнения S :

$$\frac{S}{n-1} - \frac{S}{n} = 600 \Leftrightarrow \frac{S}{n(n-1)} = 600 \Leftrightarrow S = 600n(n-1), \quad (3)$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{S}{n-2} - \frac{S}{n-1} = 840 \Leftrightarrow \frac{S}{(n-1)(n-2)} = 840 \Leftrightarrow 600n(n-1) = 840(n-1)(n-2).$$

Поскольку $n > 1$ (из условия задачи следует, что изначально Катя выбирает как минимум из трёх вариантов ответа), то $n-1 \neq 0$:

$$600n = 840(n-2) \Leftrightarrow 840 \cdot 2 = 840n - 600n \Leftrightarrow 1680 = 240n \Leftrightarrow n = 7.$$

Таким образом, изначально у Кати было 7 вариантов ответа, а сумма выигрыша (из третьего уравнения) равна $S = 600 \cdot 7 \cdot 6 = 25200$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ продлили стороны DA за точку A и CB за точку B до пересечения в точке X , а стороны AB за точку B и CD за точку D до пересечения в точке Y . Оказалось, что углы X и Y равны, $XA = CD$, $YA = CB$. Докажите, что $XBDY$ — равнобедренная трапеция. (П. Д. Муленко)

Решение. Сперва докажем, что $XBDY$ является трапецией, то есть что $BD \parallel XY$.

Для этого рассмотрим треугольники YAB и XCD : $\angle X = \angle Y$, $\angle C$ — общий. То есть $\triangle YAB \sim \triangle XCD$:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{YC}{XC} \left(= \frac{YB}{XD} \right).$$

При этом по условию нам известно, что $BC : CD = YA : XA$, то есть

$$\frac{XA}{YA} = \frac{BC}{CD} = \frac{YC}{XC},$$

то есть треугольники CBD и CXY тоже подобны, причём $\angle CDB = \angle CYX$ и $\angle CBD = \angle CXY$, откуда $BD \parallel XY$.

Теперь докажем, что $XBDY$ — равнобедренная трапеция, то есть что $YD = BX$.

С одной стороны, $\angle X = \angle Y$ по условию, и $\angle XAB = \angle YAD$, как вертикальные, то есть $\triangle YAD \sim \triangle XAB$, откуда следует, что $AD : AB = AY : AX$. С другой стороны, $\angle XYA = \angle ABD$ и $\angle YXA = \angle ADB$ как накрест лежащие, то есть $\triangle XAY \sim \triangle BAD$, откуда следует, что $AD : AB = AX : AY$.

Таким образом, $AY : AX = AX : AY$, то есть $AX = AY$, откуда треугольники XAB и AYD равны, и $XB = YD$.

Критерии. Доказана только одна из частей задачи ($BD \parallel XY$ или $BX = DY$) — 3 балла.

Задача решена в предположении, что $XA = CB$ и $YA = CD$ (вместо $XA = CD$ и $YA = CB$) — не более 5 баллов.

