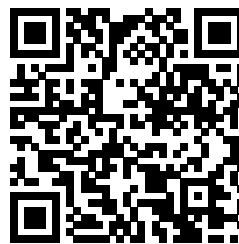




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит денежный приз. Изначально Катя планировала выбрать ответ случайным образом.

Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша увеличилось на 600 рублей.

Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша увеличилось ещё на 840 рублей. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения.

(А. А. Теслер)

Ответ: 25200.

Решение. Обозначим величину приза за S , а количество вариантов ответа за n . Так как Катя выбирает ответ случайным образом, вероятность угадать равна $1/n$, то есть изначальное математическое ожидание равно S/n .

После исключения варианта А вероятность угадать увеличилась до $\frac{1}{n-1}$, что привело к увеличению ожидаемого выигрыша:

$$\frac{S}{n-1} = \frac{S}{n} + 600. \quad (1)$$

Аналогично, исключив вариант В, Катя ещё увеличила вероятность угадать до $\frac{1}{n-2}$:

$$\frac{S}{n-2} = \frac{S}{n-1} + 840. \quad (2)$$

Выразим из первого уравнения S :

$$\frac{S}{n-1} - \frac{S}{n} = 600 \Leftrightarrow \frac{S}{n(n-1)} = 600 \Leftrightarrow S = 600n(n-1), \quad (3)$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{S}{n-2} - \frac{S}{n-1} = 840 \Leftrightarrow \frac{S}{(n-1)(n-2)} = 840 \Leftrightarrow 600n(n-1) = 840(n-1)(n-2).$$

Поскольку $n > 1$ (из условия задачи следует, что изначально Катя выбирает как минимум из трёх вариантов ответа), то $n-1 \neq 0$:

$$600n = 840(n-2) \Leftrightarrow 840 \cdot 2 = 840n - 600n \Leftrightarrow 1680 = 240n \Leftrightarrow n = 7.$$

Таким образом, изначально у Кати было 7 вариантов ответа, а сумма выигрыша (из третьего уравнения) равна $S = 600 \cdot 7 \cdot 6 = 25200$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

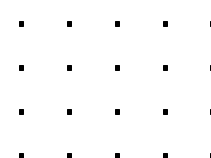
2. Существует ли такое трёхзначное число n , что $n(n+1) + 2025$ — точный квадрат?

Ответ: да, 152 ($152 \cdot 153 + 2025 = 159^2$) и 287 ($287 \cdot 288 + 2025 = 291^2$).

Решение. $n(n+1) + 2025 = (n+k)^2$, откуда $n = \frac{2025 - k^2}{2k - 1} = \frac{(45 - k)(45 + k)}{2k - 1}$. При $k = 1$ получается 2025 (четырёхзначное). Дальнейший перебор даёт целые ответы 287 и 152 при $k = 4$ и $k = 7$ соответственно, а при $k > 10$ уже получается $n < 100$.

Критерии. Достаточно одного примера с доказательством того, что получается квадрат (или с указанием, квадрат какого числа получается). Если нет ни доказательства, ни указания, то штраф 1 балл.

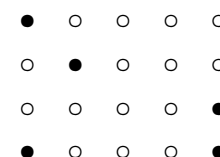
3. На клетчатом листе отмечены 20 точек в виде сетки 4×5 . Какое наибольшее количество точек можно выбрать так, чтобы среди расстояний между ними не было равных? (С. П. Павлов)



Ответ: 5.

Решение. Будем считать, что расстояние между соседними (по вертикали или горизонтали) точками равно 1. Тогда полный набор возможных расстояний между двумя точками таков: 1, 2, 3, 4, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{25}$ (13 штук).

Если выбрано 6 точек или более, то всевозможных попарных расстояний между ними не менее $6 \cdot 5/2 = 15$, то есть какие-то из них будут равны. Поэтому можно закрасить не более 5 точек — например, как изображено на рисунке справа.



Критерии. Оценка — 3 балла, пример — 2 балла. Если из решения (например, из оценки) ясно, что человек владеет теоремой Пифагора, то отдельное обоснование примера не требуется.

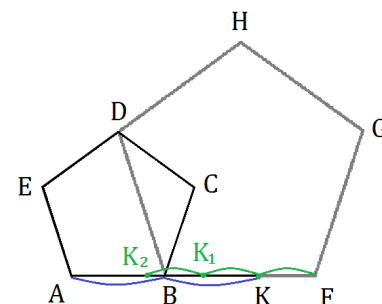
4. На плоскости отмечены две точки A и B . Андрей играет в такую игру: на каждом шаге он выбирает пару уже отмеченных точек, мысленно строит правильный пятиугольник на них как на соседних вершинах, после чего отмечает на плоскости три остальные его вершины. Может ли Андрей на каком-то шаге отметить точку строго внутри отрезка AB ?

(Е. Ю. Воронцовский)

Ответ: да.

Решение. Для начала заметим, что, имея вектор $\overrightarrow{OP}$, можно отложить вектор $\overrightarrow{OP'}$ той же длины, такой что $\angle POP' = 108^\circ$ (то есть можно повернуть данный отрезок на 108° вокруг одного из его концов). Прделав это 5 раз, мы повернём отрезок на 180° .

Теперь вернёмся к условию задачи. По точкам A и B отметим вершины пятиугольника $ABCDE$, а потом пятиугольника $BFGHD$. Получится, что $\overrightarrow{BF} = \varphi \overrightarrow{AB}$, где $\varphi \in (1; 2)$ — отношение диагонали пятиугольника к его стороне (действительно, в треугольнике BDC , образованном двумя сторонами и диагональю, диагональ меньше суммы двух сторон, но лежит против наибольшего угла; на самом деле $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, но для нашего решения это неважно).



Также можно (см. первый абзац решения) отложить $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB}$. Получим $\overrightarrow{FK}$, который короче, чем AB , поэтому, если отложить его несколько раз ($\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{K_1K_2} = \dots$), какая-то из точек K_i окажется на отрезке AB .

Критерии. 2 балла, если научились строить какую-нибудь точку на прямой AB (кроме A и B).

5. Назовём число *примечательным*, если в его записи используются только две разных цифры. Сколько существует 11-значных примечательных чисел, кратных 225?

(Л. С. Корешкова)

Ответ: 524 числа.

Решение. Делимость на 225 равносильна делимости на 25 и на 9, то есть сумма цифр делится на 9, а последние цифры равны 00, 25, 50 или 75.

Если последние цифры 00, то пусть вторая используемая цифра (кроме нуля) равна a . Если $a = 9$, то любая комбинация цифр, в которой число не начинается с нуля, подойдёт, получается $2^8 = 256$ вариантов. Если $a = 3$ или $a = 6$, то a встречается 3, 6 или 9 раз (один из них — в начале числа), получается для каждой из них $C_8^2 + C_8^5 + C_8^8 = 28 + 56 + 1 = 85$ вариантов. Если a не кратно 3, то все 9 цифр должны равняться a . Получается $256 + 2 \cdot 85 + 6 = 432$ варианта.

Если последние цифры 25, то остальные 9 цифр равны 2 или 5, и сумма цифр составляет $7 + 9 \cdot 2 + 3k$, где k — количество пятёрок; это число не делится на 9.

Если последние цифры 50, то остальные 9 цифр равны 5 или 0, и сумма цифр составляет $5 + 5k$, где k — количество пятёрок; это число кратно 9 при $k = 8$, то есть 8 пятёрок и 1 ноль; поскольку 0 не может быть в начале, то таких чисел 8.

Если последние цифры 75, то остальные 9 цифр равны 5 или 7, и сумма цифр составляет $12 + 9 \cdot 5 + 2k$, где k — количество пятёрок; это число кратно 9 при $k = 3$, что даёт $C_9^3 = 84$ варианта.

Таким образом, всего существует $432 + 8 + 84 = 524$ примечательных 11-значных числа.

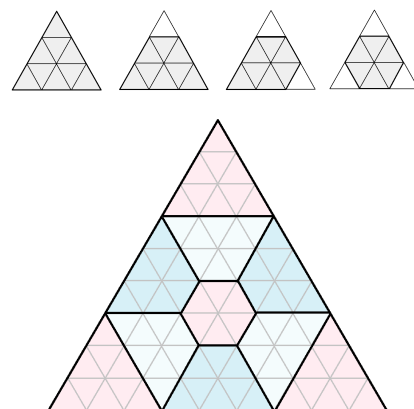
Критерии. 1 балл за переход к делимости на 25 и 9. Ещё один балл за последние две цифры. Ещё 2 балла за верный разбор случая с 00 и по одному баллу за каждый другой случай.

6. Назовём *экономичностью* многоугольника отношение его площади к периметру. Можно ли разрезать равносторонний треугольник с экономичностью $3E$ на 10 частей, каждая из которых имеет экономичность E ?

(А. А. Теслер)

Ответ: да.

Решение. Заметим сначала, что если уменьшить линейные размеры втрое, экономичность также уменьшается втрое, поэтому треугольник можно разбить на 9 треугольников нужной экономичности. Однако нам нужно 10 частей, а не 9. Оказывается, что если отрезать у треугольника со стороной a «уголок» со стороной $\frac{a}{3}$, то и периметр, и площадь уменьшатся на $1/9$ от исходного значения, и экономичность не изменится. Аналогично можно отрезать не один уголок, а два или три (см. рисунок): и периметр, и площадь уменьшатся на $2/9$ и $3/9$ соответственно. Поэтому задача сводится к тому, чтобы треугольник, состоящий из 81 треугольника, разрезать на 10 фигур указанного вида. Пример такого разрезания показан ниже.



Критерии. 1 балл — за указание, что треугольник со втрое меньшей стороной имеет экономичность E . Ещё 1 балл, если найдена хотя бы одна из остальных подходящих фигур.