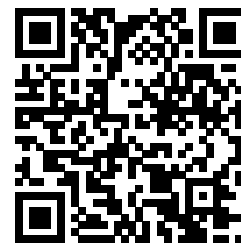




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



10 класс

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. У n -значного числа первые две его цифры различаются на 1, вторая и третья — на 2, ..., предпоследняя и последняя — на $n-1$, последняя и первая — на n . При каком наибольшем n такое возможно? (С. П. Павлов)

2. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (А. А. Теслер)

3. Дана фраза:

$\square\square\square$ -гранная пирамида имеет:

- столько же вершин, сколько $\square\square\square$ -гранная призма,
- столько же рёбер, сколько $\square\square\square$ -гранная призма,
- и столько же граней, сколько $\square\square\square$ -гранная призма.

Сколько способов вписать в каждый квадрат по цифре так, чтобы получить верное утверждение? Напомним, что натуральное число не может начинаться с нуля. (А. А. Теслер)

4. Дан треугольник ABC . Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых эти стороны касаются вписанной окружности. Пусть отрезок B_2C_2 имеет с окружностью, вписанной в $\triangle AB_1C_1$, a общих точек; A_2C_2 с окружностью, вписанной в $\triangle BA_1C_1$ — b общих точек; A_2B_2 с окружностью, вписанной в $\triangle CA_1B_1$ — c общих точек. Найдите максимальное значение числа $a + b + c$. (Ю. Э. Нагуманов)
5. Коля выписал каждый натуральный делитель числа 2025^n по одному разу, после чего покрасил некоторые из них в красный цвет, а остальные — в синий. При этом он действовал так, чтобы разность между суммой всех красных делителей и суммой всех синих

делителей оказалась минимально возможным (при данном n) положительным числом. Какими могут оказаться две последние цифры этой разности? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (М. В. Карлукова)

6. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (А. А. Теслер)