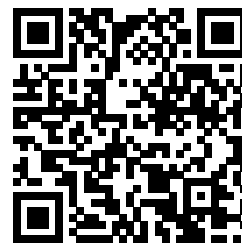




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Задачи для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?

Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (А. А. Теслер)

2. Существует ли 2025-значное натуральное число без нулей в десятичной записи, которое увеличивается в 4 раза, если записать его задом наперёд? (С. П. Павлов)

3. Решите уравнение в целых числах: $x = x^2 + xy + y^2 + 2y + 2$. (П. Д. Муленко)

Ответ: (1, 1), (1, 2), (2, 2).

4. Назовём *экономичностью* многогранника отношение его объёма к площади поверхности. Можно ли разрезать правильный тетраэдр экономичностью E на 5 частей, сумма экономичностей которых равна $3E$? (А. А. Теслер)

5. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (А. А. Теслер)

6. На плоскости отмечены две точки A и B . Андрей играет в такую игру: на каждом шаге он выбирает пару уже отмеченных точек, мысленно строит правильный пятиугольник на них как на соседних вершинах, после чего отмечает на плоскости три остальные его вершины. Сможет ли Андрей отметить середину отрезка AB ? (Е. Ю. Воронецкий)