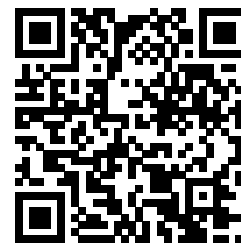




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап



Задачи для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят. (С. П. Павлов, П. Д. Муленко)

2. Олеся нарисовала на доске 6 точек, соединила некоторые из них отрезками, и рядом с каждой точкой написала количество отрезков, которые из этой точки выходят. После этого она сообщила 5 утверждений:

- (a) Только у одной точки стоит цифра 4.
- (b) Цифра 2 написана ровно у двух точек.
- (c) Тройка встречается ровно один раз.
- (d) Только у одной точки стоит 0.
- (e) Половина написанных цифр — двойки.

Какие числа могла написать Олеся, если ровно одно из утверждений неверно?

Укажите все варианты, объясните, почему возможны только они, а также подтвердите каждый вариант примером. (П. Д. Муленко)

3. На прямой отметили 4 точки и измерили длины всех возможных отрезков с вершинами в этих точках. Оказалось, что длина отрезка между средними точками равна 4 см, а сумма всех длин равна 31 см. Найдите длину самого большого отрезка из измеренных. (П. Д. Муленко)

4. Найдите количество семизначных чисел, кратных 12, в записи которых используются только единицы и двойки, причём никакие две двойки не стоят рядом. (Л. С. Корешкова)

5. В равенстве $* + ** + *** = ****$ (сумма однозначного, двузначного и трёхзначного чисел равна четырёхзначному) расставлены вместо звёздочек все 10 цифр по одному разу так, что равенство верно. Чему может быть равно четырёхзначное число? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (С. П. Павлов)

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (С. П. Павлов)