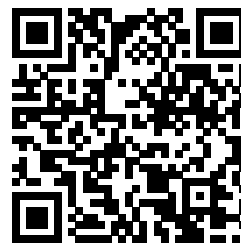




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

6 класс



Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят.

(С. П. Павлов, П. Д. Муленко)

2. В нашей семье все родились в один и тот же день и месяц, но в разные годы. Мой братик на 14 лет младше меня, а моя сестра на 3 года меня старше. Я родился, когда маме было 27. Папа посчитал наш средний возраст (без учёта себя) и получил 21. Сколько лет каждому из нас?

Примечание. Средний возраст — это отношение суммы возрастов к количеству человек.

(П. Д. Муленко)

3. Учитель попросил своих учеников продемонстрировать свои знания о факториалах. Отличница Маша хорошо знает натуральные числа, поэтому правильно записала число $100!$ как произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.

Троечник Вова знает только нечётные числа, поэтому записал число $100!$ как произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 97 \cdot 99$, пропуская все чётные множители.

А хорошист Олежа решил понять, во сколько раз Машино число больше Вовино, для чего вычислил их частное. Однако Олежа игнорирует нули в конце чисел, считая, что они ничего не значат (иными словами, он как бы «стёр» все нули на концах множителей, написанных ранее ребятами, и сотрёт все нули, которые получатся в конце его собственного произведения).

Какая будет последняя цифра в числе Олежи?

(П. Д. Муленко)

4. На прямой в некотором порядке отмечены 4 точки: A , B , C и D . Известно, что $AB : BD = 12 : 5$, $AD : BC = 17 : 15$, $DB : DA = 5 : 17$, $DC : BA = 5 : 3$.

(a) Найдите отношение $BC : CD$.

(b) В каком порядке расположены точки?

(П. Д. Муленко)

5. Найдите количество 11-значных чисел, кратных 72, в записи которых используются только единицы и двойки. (Л. С. Корешкова)

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (С. П. Павлов)