

Решения задач для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. В 10А и 10Б классах учатся по 30 человек. Средний рост мальчиков в 10А классе больше, чем средний рост мальчиков в 10Б. И средний рост девочек в 10А классе больше, чем средний рост девочек в 10Б. Может ли оказаться, что средний рост всех учеников 10А класса меньше, чем средний рост всех учеников 10Б? (А. А. Теслер)

Решение. Да. Например, пусть в 10А классе 10 мальчиков и 20 девочек, а в 10Б — наоборот. Также пусть мальчики из 10А имеют рост 181 см, мальчики из 10Б — 180 см, девочки из 10А — 175 см, девочки из 10Б — 174 см. Тогда в 10А средний рост равен 177 см, а в 10Б — 178 см.

2. Функция f задана формулой $f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 1}$. Докажите, что для любых двух вещественных взаимно обратных чисел s и t сумма $f(s) + f(t)$ не превосходит 1. (С. П. Павлов)

Решение. Пусть $s \neq 0$, $t = s^{-1}$ и $u = s + s^{-1}$, тогда

$$f(s) + f(t) = \frac{2s}{3s^2 + 1} + \frac{2s^{-1}}{3s^{-2} + 1} = \frac{8s + 8s^{-1}}{(3s^2 + 1)(3s^{-2} + 1)} = \frac{8u}{3(s^2 + s^{-2}) + 10} = \frac{8u}{3(u^2 - 2) + 10} = \frac{8u}{3u^2 + 4}.$$

Требуется доказать, что $f(s) + f(t) \leq 1$, то есть $3u^2 - 8u + 4 \geq 0$. Это квадратное неравенство ложно только при $\frac{2}{3} < u < 2$. Но u либо отрицательно (при $s < 0$), либо не меньше 2 (при $s > 0$, это следует из неравенства о средних).

Критерии. За идею с заменой даётся 2 балла. Если не учтено, что s и t могут быть отрицательными, ставится не больше 5 баллов.

3. В треугольнике ABC проведены две медианы AM и BN . Третья вершина C соединена с точками D и E , которые делят AB на три равные части. Какую долю площади треугольника ABC занимают два закрашенных треугольника? (Л. С. Корешкова)

Ответ: $\frac{1}{30}$.

Решение. Введём обозначения $X = AM \cap CE$, $Y = BN \cap CE$, $Z = AM \cap BN$. Из теоремы Менелая, применённой к $\triangle AMB$ и прямой CE , следует: $AX : XM = 4 : 1$. Из этой же теоремы, применённой к $\triangle ANB$ и прямой CE , получается $NY : YB$. Кроме того, $AZ : ZM = ZB : ZN = 2 : 1$ по свойству медиан. Так как $S_{ZMB} = \frac{1}{6} S_{ABC}$ (медианы делят любой треугольник на шесть равновеликих частей), то

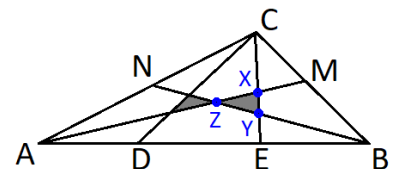
$$S_{XYZ} = \frac{1}{2} ZX \cdot ZY \cdot \sin \angle MZB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} ZM \cdot \frac{1}{4} ZB \cdot \sin \angle MZB = \frac{1}{10} S_{ZMB} = \frac{1}{60} S_{ABC}.$$

Аналогично находится и площадь второго закрашенного треугольника, равная площади первого.

Критерии. За формулировку теоремы Менелая или за утверждение о сохранении отношения площадей при аффинных преобразованиях ставится 2 балла (они не складываются).

4. В мешке для игры в лото лежат 10 бочонков со следующими числами: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 30, 53, 75. Из мешка вынимаются три бочонка и из чисел, которые можно образовать, расставляя их, записывается наибольшее. Пример: если вы вытащили бочонки 7, 20, 30, то вы запишете число 73020. Сколько чисел, больших 2024, можно записать? (Л. С. Корешкова)

Ответ: $C_{10}^3 - C_5^3 - 6 = 104$.



Решение. Отсортируем бочонки следующим образом: 7, 75, 5, 53, 3, 30, 2, 20, 1, 10. Заметим, что в записанном числе бочонки идут в том же порядке, в котором они отсортированы (т. е. если переставить любые два бочонка, то составленное из них число уменьшится). Если взять 3 однозначных бочонка, то составленное число будет меньше 2024, а в остальных случаях оно строго больше: если оно пяти- или шестизначное, то это очевидно; если первая цифра больше 2, это тоже очевидно, и остаются только два случая $2|20|1$ и $2|1|10$. Всего $C_{10}^3 - C_5^3 = 110$ способов выбрать бочонки.

Однако некоторые числа соответствуют более чем одному набору бочонков (например, 7553 получается из наборов 75, 5, 3 и 7, 5, 53). Остаётся найти все такие числа. Разобьём число на две части, состоящие из бочонков с 7 по 3 и с 30 по 10. Заметим, что вторая часть выделяется и разбивается на бочонки единственным образом: бочонки 10, 20 и 30 восстанавливаются по нулям, после этого 1 и 2 тоже выделяются однозначно.

Первая часть — это число, состоящее из цифр 7, 5, 3, которые нестрого убывают. Возможные неоднозначности при разбиении на бочонки возникают только из-за $75 = 7|5$ и $53 = 5|3$. Так как нам нужны разбиения одинаковой длины, есть только варианты $75|3 = 7|53$ (с добавлением одного из 5 бочонков во вторую часть) и $75|5|3 = 7|5|53$ (с пустой второй частью). Поэтому для ответа надо вычесть 6 из количества способов выбрать бочонки.

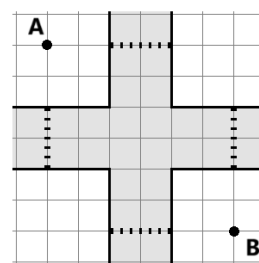
Критерии. За указание, какие наборы бочонков подходят, ставится 1 балл, ещё 2 балла добавляются за подсчёт количества способов выбрать бочонки. Все найденные варианты с неоднозначным разложением на бочонки оцениваются в 2 балла (1 балл, если найден хотя бы один из них).

5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:

- 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;
- далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
- следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
- и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.

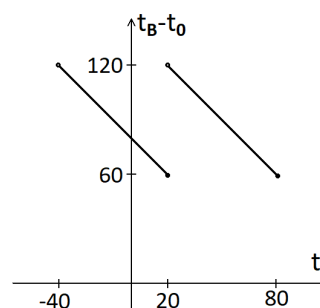
Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке А, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку В. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку В?

(А. А. Теслер)



Ответ: 90 секунд.

Решение. Пусть в момент времени $t = 0$ (в секундах) зажигается зелёным светофор через Горизонтальную улицу. Тогда если начальное время $-40 < t_0 \leq 20$, то Егор успевает перейти Горизонтальную улицу к моменту $t_1 \in [10; 40)$, начинает переходить вертикальную при $t = 60$ и приходит в точку В в момент $t_B = 80$. Получается, что он затратил от 120 до 60 секунд, причём поскольку зависимость линейная (см. график), то среднее время равно 90 секунд. При $20 < t_0 \leq 80$ всё то же самое, только улицы переходятся в другом порядке, и среднее в этом промежутке тоже 90 секунд. Далее всё повторяется, поскольку период чередования сигналов — 120 секунд.



6. На отрезке FI как на диаметре построена полуокружность, точками $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ разделённая на равные дуги ($n > 2$). На отрезке отметили точку D , и оказалось, что при некотором k ($1 \leq k < \frac{n}{2}$) синусы углов $A_k D A_{2n-k}$ и $A_{n-k} D A_{n+k}$ равны. Докажите, что D — середина FI .

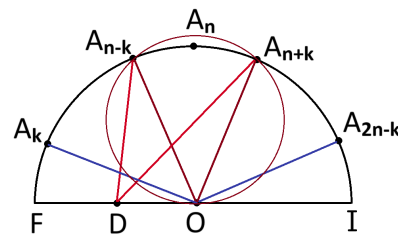
(П. Д. Муленко)

Решение. Углы заведомо не могут быть равны ($k < n - k$, поэтому второй угол лежит внутри первого). Значит, равенство синусов означает, что углы в сумме дают 180° . Обозначим середину

отрезка FI через O и заметим, что угол A_kOA_{2n-k} , как центральный, равен $2n - 2k$ дугам, а угол $A_{n-k}OA_{n+k} = 2k$ дугам, то есть в сумме они дадут всю полуокружность, и, тем самым, будут равны 180° .

Покажем теперь, что если точка D не совпадает с O , то сумма будет заведомо меньше 180° (и, тем самым, их синусы не будут равны). Построим описанные окружности треугольников A_kOA_{2n-k} и $A_{n-k}OA_{n+k}$ (на рисунке показана вторая из них). Так как луч $OA_n \perp FI$, то центры обеих окружностей будут лежать на отрезке OA_n , а отрезок FI будет их касаться (при этом центральные углы больших окружностей станут вписанными для маленьких).

Но точка D заведомо вне построенных окружностей, и каждый из рассматриваемых углов будет меньше соответствующего вписанного угла с вершиной в O .



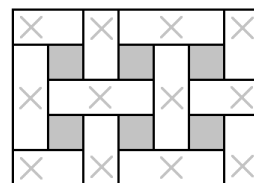
Критерии. За упоминание того, что углы не могут быть равны, даётся 2 балла.

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником?

(А. А. Теслер)

Ответ: да.

Решение. Приведём одну из возможных конструкций. Рассмотрим прямоугольник $(2n+1) \times (2m+1)$ с нечётными сторонами, где $nm \geq 2$. Разобьём его на прямоугольники 1×1 , 1×2 , 1×3 , 2×1 , 3×1 как на рисунке (где $n = 2$ и $m = 3$), то есть вырежем квадратики на пересечении строк и столбцов с чётными номерами (показаны серым), а между соседними такими квадратами расположим прямоугольники 1×3 и 3×1 чередующимся образом (прямоугольники из двух клеток получаются при обрезании границами большого прямоугольника). Заметим, что полученные кусочки (кроме квадратов) находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками, отмеченными крестиком. Поэтому всего имеется $nm + (n+1)(m+1)$ кусочков.



Более того, при ограничении $nm \geq 2$ нет никакого прямоугольника, целиком состоящего из получившихся маленьких прямоугольников, отличного от них и от всего большого прямоугольника. Действительно, если он содержит квадратик, то он содержит и какого-то его соседа, а тогда он содержит всех

его соседей и ближайшие квадратики. Если же он содержит какой-то прямоугольник, то легко проверить, что он тогда содержит и соседний с ним квадратик.

При $\{n, m\} = \{28, 35\}$ получится 2024 прямоугольника, причём $2n + 1$ и $2m + 1$ не больше 100. Теперь в получившемся разрезании расширим первые строку и столбец до нужной ширины, чтобы получить требуемое разрезание квадрата 100×100 .

Критерии. Если не доказывается, что приведённый пример удовлетворяет условиям, то ставится не больше 5 баллов.