

## Решения задач для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Решите уравнение  $[x]^2 + 2\{x\}^2 = 2x^2$ . (Здесь  $[x]$  и  $\{x\}$  — целая и дробная части  $x$ .) (С. П. Павлов)

Ответ:  $x \in \{-2,25, -1,5, -0,75\} \cup [0, 1)$ .

Решение. Введём обозначения  $y = [x]$  и  $z = \{x\}$ , тогда  $y$  — целое число,  $0 \leq z < 1$ , и из уравнения получается  $y(y + 4z) = 0$ . Если  $y = 0$ , то подходит любое  $z$  из полуинтервала. Если же  $0 \neq y = -4z$ , то  $y \in \{-3, -2, -1\}$  и в каждом случае получается единственное решение.

Критерии. Если участник считает, что целая часть — это результат округление до ближайшего целого (а не вниз) и  $\{x\} = x - [x]$ , то за в остальном полное решение (с ответом  $x \in (-1, 1)$ ) ставится 2 балла.

2. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски  $8 \times 8$  числа  $+1$  и  $-1$  (начинает Костя) по следующим правилам:

- перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
- если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
- после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (П. Д. Муленко)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил  $+1$  синим цветом. Это означает, что сумма синих чисел всегда будет положительна (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва сделать её равной нулю, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какое-либо число *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* поставить число так, чтобы в итоге в одном или трёх цветах оказалась отрицательная сумма (что и обеспечит отрицательное произведение). После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не обнуляли сумму в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит число вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить число вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов сумма оказалась отрицательна.

Если же Костя первым ходом поставил  $-1$ , то Маша действует точно также: при добавлении второго цвета она добавляет третий с нужным знаком, а иначе последним ходом ставит  $+1$  другим цветом.

Критерии. За замечание, что сумма чисел одного цвета определяется первым слагаемым, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

3. Назовём *униквадратной* дробь вида  $\frac{1}{n^2}$ , где  $n$  — натуральное число. Найдите максимальную униквадратную дробь, представимую в виде суммы двух униквадратных дробей.

(С. П. Павлов, А. А. Теслер)

Ответ:  $\frac{1}{144}$  (представима в виде  $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$ ).

**Решение.** Пусть  $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$ , тогда  $p^2 q^2 = p^2 n^2 + q^2 n^2$ . Другими словами,  $(pn, qn, pq)$  является пифагоровой тройкой. Обозначим через  $g$  наибольший общий делитель чисел  $pn$  и  $qn$ . Тогда  $g$  делит  $pq$ ,  $(a, b, c) = (\frac{pn}{g}, \frac{qn}{g}, \frac{pq}{g})$  является примитивной пифагоровой тройкой (из попарно взаимно простых чисел),  $n = \sqrt{\frac{gab}{c}}$ ,  $p = \sqrt{\frac{gac}{b}}$ ,  $q = \sqrt{\frac{gbc}{a}}$ . Так как под корнями должны быть целые числа и  $a, b, c$  попарно взаимно просты, то все три числа  $a, b, c$  делят  $g$ .

Так как  $a$  или  $b$  делится на 3 (иначе  $c^2$  давало бы остаток  $a^2 + b^2 \equiv 2$  по модулю 3, что невозможно), то  $n$  тоже делится на 3. Кроме того,  $a$  или  $b$  делится на 4 (иначе  $a^2 + b^2$  давало бы остаток 1 или 5 по модулю 8, но они не являются остатками точных квадратов), поэтому  $n$  делится на 4 (выражение под корнем делится на 4 благодаря  $a$  или  $b$  и ещё на 4 благодаря  $g$ ). Следовательно,  $n \geq 12$ , и случай  $n = 12$  реализуется при  $a = 3, b = 4, c = 5, g = 60, p = 15, q = 20$ .

**Критерии.** За пример ставится 3 балла, за оценку — 4.

4. Через центр бумажного равностороннего треугольника площади 1 проведена прямая, не проходящая через вершину. Если согнуть треугольник по этой прямой, то некий четырёхугольник окажется покрыт дважды. Какова минимально возможная площадь этого четырёхугольника?

(Л. С. Корешкова)

**Ответ:**  $1/3$ .

**Решение.** Обозначим вершины треугольника через  $A, B, C$  так, что прямая отделяет  $AB$  от  $C$ , симметричные им точки — это  $A', B', C'$ . Точки пересечения  $AC$  с  $A'C'$ ,  $AB$  с  $A'C'$ ,  $AB$  с  $B'C'$ ,  $BC$  с  $B'C'$  обозначим  $E, F, G, H$  соответственно (см. рис.).

Надо найти минимум площади  $EFGH$ . Заметим, что треугольники  $OEF, OFG, OGH$  равны:  $OEF$  и  $OGH$  получаются из  $OFG$  отражением относительно  $EH$  и поворотом на  $120^\circ$  в разные стороны. Поэтому достаточно найти минимум площади  $OEF$ . Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  углы  $FOA$  и  $EOA$  и заметим, что площадь  $OEF$  пропорциональна  $|OF| \cdot |OE|$ .

Так как  $|OA|$  и углы  $OAF, OAE$  постоянны, то по теореме синусов  $|OF|$  пропорционально

$$\frac{1}{\sin(\pi - \frac{\pi}{6} - \alpha)} = \frac{1}{\cos(\beta)},$$

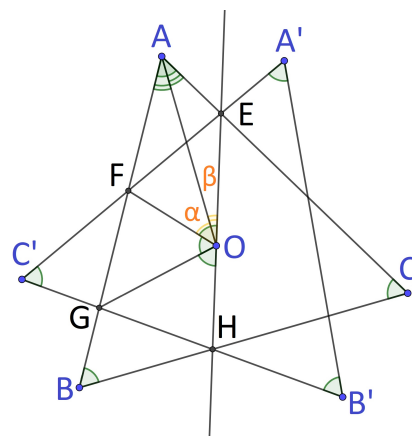
аналогично  $|OE|$  пропорционально  $1/\cos(\alpha)$ . Так как  $\alpha + \beta = \pi/3$ , удобно ввести переменную  $\gamma = \alpha - \pi/6$ .

Итого,  $\alpha = \gamma + \pi/6$ ,  $\beta = \gamma - \pi/6$ ,  $\gamma$  может принимать значения от  $-\pi/6$  до  $\pi/6$  не включительно, и нас интересует максимум выражения

$$\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \gamma - \frac{1}{4}.$$

Он достигается при  $\gamma = 0$  (то есть  $OE \parallel AB$ ), это даёт минимальную площадь  $1/3$ .

**Критерии.** За пример даётся 2 балла, за оценку — 5.



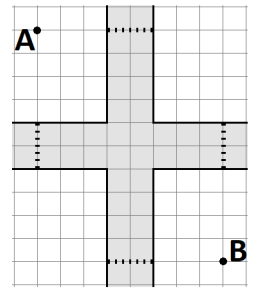
5. На плане показан перекрёсток Горизонтальной и Вертикальной улиц (сторона клетки равна 5 метрам, переходы показаны пунктиром). Сигналы светофоров чередуются с периодом 2 минуты по следующему графику:

- 40 секунд горит зелёный для пешеходов, переходящих Горизонтальную улицу;

- далее 20 секунд для всех пешеходов красный;
- следующие 40 секунд — зелёный для переходящих Вертикальную улицу;
- и последние 20 секунд — снова красный для всех пешеходов.

Егор ходит со скоростью 1 м/с. В случайный момент времени он оказывается в точке А, откуда наиболее быстрым способом, не нарушающим правил, переходит в точку В. При этом Егор видит, сколько времени осталось до смены цвета на каждом светофоре, и не начинает переходить через дорогу, если не успеет завершить переход. Сколько секунд в среднем пройдёт, прежде чем Егор попадёт в точку В?

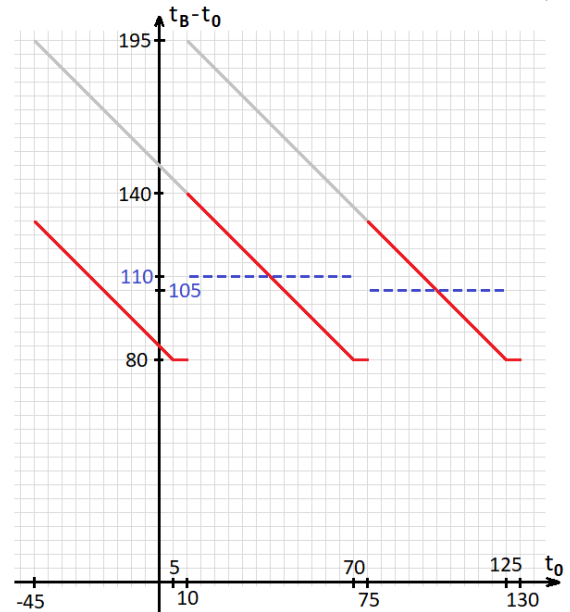
(А. А. Теслер)



**Решение.** Пусть в момент времени  $t = 0$  (в секундах) зажигается зелёным светофор через Горизонтальную улицу. Посчитаем, сколько секунд потратит Егор в зависимости от времени выхода  $t_0$ . Заметим, что до первого и после второго перехода Егору будет быстрее всего идти по отрезкам, параллельным улицам, а между двумя переходами — по гипотенузе, на которую он затратит  $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$  секунд. Подходя к дороге, Егору надо дожидаться подходящего времени для перехода ( $120n \leq t \leq 120n + 30$  для Горизонтальной улицы и  $120n + 60 \leq t \leq 120n + 90$  для Вертикальной).

Возможны следующие случаи (включая те, где Егор переходит дороги в неоптимальном порядке).

- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу, причём ему не надо будет ждать светофора ни при первом переходе ( $120n + 45 \leq t_0 \leq 120n + 75$ ), ни при втором ( $120n - 50 \leq t_0 \leq 120n - 20$ ). Тогда ему понадобится 80 секунд, а  $t_0$  лежит в интервале  $120n + 70 \leq t_0 \leq 120n + 75$ .
- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу и ему не придётся ждать первый светофор, зато придётся ждать второй. Тогда ему понадобится от 105 до 80 секунд. При этом  $t_0$  лежит в промежутке  $120n + 45 \leq t_0 < 120n + 70$  и время движения зависит от  $t_0$  линейно в каждом периоде.
- Егор сначала перейдёт Вертикальную улицу, но ему придётся ждать оба светофора. Он потратит от 195 до 105 секунд в линейной зависимости от  $t_0 \in (120n - 45; 120n + 45)$ .
- Если Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и ему не надо ждать светофоров, то он потратит 80 секунд и  $120n + 5 \leq t_0 \leq 120n + 10$ .
- Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и будет ждать только на втором светофоре, тогда ему понадобится от 105 до 80 секунд в линейной зависимости от  $t_0 \in [120n - 20; 120n + 5)$ .
- Егор сначала перейдёт Горизонтальную улицу и будет ждать у обоих светофоров, тогда ему понадобится от 195 до 105 секунд в линейной зависимости от  $t_0 \in (120n + 10; 120n + 100)$ .



Найдём среднее значение в промежутке  $t_0 \in (120n + 5; 120n + 125)$ . Так как Егор действует оптимально, ему понадобится 80 секунд при  $120n + 5 \leq t_0 \leq 120n + 10$ , от 140 до 80 секунд при  $120n + 10 \leq t_0 \leq 120n + 70$  (в среднем 110 секунд, так как зависимость линейная), 80 секунд при  $120n + 70 \leq t_0 \leq 120n + 75$ , от 130 до 80 секунд при  $120n + 75 \leq t_0 \leq 120n + 125$  (в среднем 105, т. к. зависимость линейная).

Итого в среднем понадобится  $\frac{80 \cdot 5 + 110 \cdot 60 + 80 \cdot 5 + 105 \cdot 50}{120} = \frac{1265}{12} = 105 \frac{5}{12}$  секунд.

**Критерии.** Если в решении предполагается, что Егор ходит только по горизонтали и вертикали, и в целом задача решена верно (ответ —  $107 \frac{1}{12}$  секунд), то даётся 2 балла.

6. В школе, где учится Алиса, ставят отметки 1, 2, 3, 4 и 5. Алиса за первую четверть получила ровно 60 отметок. Перемножив их, она получила число, сумма цифр которого равна 12. Каково максимально возможное среднее арифметическое Алисиных оценок?

(А. А. Теслер)

**Ответ:** 4,65.

**Решение.** Полученное Алисой произведение имеет сумму цифр 12, значит, оно делится на 3, но не на 9. В таком случае оно имеет вид  $3 \cdot 2^b \cdot 5^c$ . Его десятичная запись начинается либо с числа  $3 \cdot 5^n$  (при  $n = c - b \geq 0$ ), либо с числа  $3 \cdot 2^{-n}$  (при  $n = c - b < 0$ ), а далее идут нули. Рассмотрим первый случай. При  $n = 2$  сумма цифр действительно равна 12 (при  $n = 0$  и  $n = 1$  — нет). Если  $n > 2$ , то  $5^n$  заканчивается на 25 (легко доказать индукцией по  $n$ ), а  $3 \cdot 5^n$  — на 75. Но перед 75 есть ещё какие-то цифры, поэтому сумма цифр больше 12. Итак, этот случай реализуется только при  $n = 2$ . Тогда три из оценок равны 3, 5, 5. Произведение остальных 57 оценок можно сделать равным степени десятки: например, если среди них 38 пятёрок и 19 четвёрок, то оно равно  $10^{38}$ . В этом случае среднее арифметическое равно  $(3 + 19 \cdot 4 + 40 \cdot 5) : 60 = 4,65$ . Чтобы ещё увеличить среднее, нужно увеличить количество пятёрок (так как от тройки избавиться невозможно), но тогда в разложении увеличится степень пятёрки ( $c$ ) и уменьшится степень двойки ( $b$ ), то есть будет  $n = c - b > 2$ . По той же причине при среднем, большем 4,65, невозможен второй случай (где  $b > c$ ).

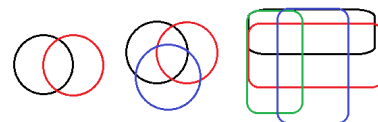
**Критерии.** За указание того, что число имеет такое разложение на простые, даётся 2 балла. За пример даётся 3 балла.

7. У Испытателя есть Полигон в виде квадрата. В известной точке Полигона находится Источник, испускающий 10 типов излучений, которые распространяются по прямым и кривым траекториям, но не могут пересекать загородки (для каждого излучения свой вид загородки). Излучения делятся на полезные и вредные (возможно, все 10 полезны или все 10 вредны), причём Испытатель не знает, какие излучения полезны. Благоприятна для жизни та зона, в которую проникают все полезные излучения и не проникают вредные.

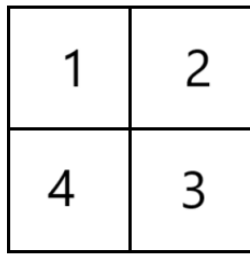
Испытатель готовится к эксперименту: он устанавливает 10 загоронок (по одной каждого типа) так, чтобы каждая загородка делила Полигон на две части. После этого он включит Источник, и эксперимент начнётся. Испытатель хочет, чтобы благоприятная зона оказалась связной (то есть не состояла из нескольких отдельных частей), а её площадь составляла  $\frac{1}{1024}$  от площади квадрата. Может ли он установить загородки так, чтобы гарантировать это? Две загородки могут пересекаться лишь в конечном числе точек; проводить загородку через Источник нельзя. (А. А. Теслер)

**Ответ:** да, может.

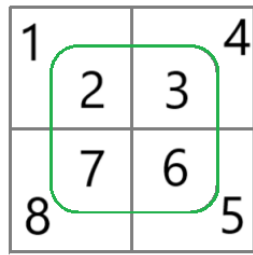
**Примечание.** Широко известный математический объект — диаграммы Эйлера–Венна для  $n$  множеств при малых  $n$  (см. рисунок справа). Из решения этой задачи следует, что такие диаграммы возможны для произвольного  $n$ .



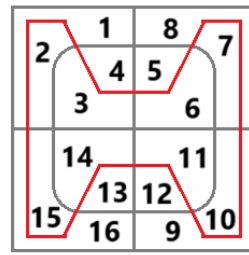
**Решение.** Будем строить загородки так, как показано на рисунке ниже. Первые две из них соединяют середины противоположных сторон Полигона и делят его на 4 зоны. Каждая следующая загородка — замкнутая линия, которая проходит через каждую из зон, образованных предыдущими загородками, и делит её на две равновеликих части. Чтобы провести такую линию по всем зонам, нужно пронумеровать их так, чтобы каждые две зоны с соседними номерами (а также последняя и первая) имели общий участок границы. Построим такую нумерацию по индукции (после  $k$  проведённых загоронок нужно пронумеровать зоны от 1 до  $2^k$ ). При  $k = 2$  пронумеруем зоны «по кругу» от 1 до 4. При добавлении очередной загородки будем делить зону  $a$  на новые зоны  $2a - 1$  и  $2a$ , причём если  $a$  нечётно, то зона  $2a - 1$  будет вне новой загородки, а  $2a$  — внутри, а если чётно, то наоборот. В результате две новых зоны с соседними номерами будут либо половинками одной старой зоны, либо половинками соседних старых зон, не разделёнными новой загородкой (то есть по-прежнему соседними). Зона с номером  $2^k$  всё время будет вне новых загоронок (как вторая половина зоны с чётным номером  $2^{k-1}$ ), как и зона номер 1 (как первая половина зоны с нечётным номером 1), то есть они будут оставаться соседними.



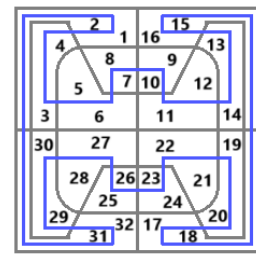
k=2



k=3



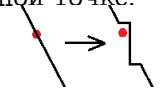
k=4



k=5

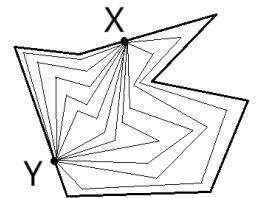
Разумеется, мы будем проводить загородки трансверсально (то есть в точке пересечения первая из пересекающихся загоронок переходит по другую сторону от второй — нет касания или общих фрагментов ненулевой длины). Также нетрудно избежать пересечения трёх загоронок в одной точке.

Если окажется, что одна из загоронок проходит через Источник, то можно сдвинуть её, компенсировав изменение площади где-нибудь рядом (см. рисунок).



Число зон каждый раз удваивается, поэтому после проведения 10 перегородок мы получим 1024 куска. Благоприятная зона соответствует набору из 10 ответов на вопросы «Нужно ли отделяться от источника перегородкой номер  $i$ ?». Ответ на каждый вопрос уменьшает количество подходящих кусков вдвое, то есть после 10 вопросов останется как раз один кусок. Итак, благоприятная зона связана.

Осталось понять, почему любую зону можно разбить на две равновеликих части (тогда после 10 разбиений площадь каждой зоны станет как раз равна  $\frac{1}{1024}$  от общей). Причина продемонстрирована на рисунке справа: по мере сдвига границы слева направо площадь левой части непрерывно возрастает, поэтому существует момент, когда она станет равна половине площади всей фигуры.



На самом деле многие геометрические соображения, использованные нами, не вполне строги, хотя и интуитивно очевидны. Например, не очень понятно, что значит «площадь левой части непрерывно возрастает» (в школьном курсе изучаются лишь непрерывные функции одной переменной — о какой функции тут идёт речь?). Да и вообще неясно, что такое площадь произвольной фигуры. Поэтому будем проводить загородки исключительно в виде ломаных линий (понятие площади многоугольника считаем известным). Ниже доказывается ключевое геометрическое утверждение, использованное в решении.

**Теорема.** Для любого многоугольника  $P$  и двух различных точек  $X, Y$  на его границе можно провести простую ломаную  $L$  с концами в  $X$  и  $Y$ , у которой все остальные точки лежат строго внутри  $P$ , площади получившихся двух многоугольников равны, и при этом  $L$  не проходит через заданную точку  $Z$  внутри  $P$ . **Доказательство:** индукция по количеству вершин  $P$ , к которым также отнесём сами точки  $X$  и  $Y$  (если они лежат на сторонах). В случае, когда  $P$  является треугольником, а  $X$  и  $Y$  — его вершинами, в качестве  $L$  можно взять двухзвенную ломаную с промежуточной вершиной в середине чевианы из третьей вершины  $P$  (чевиана выбирается так, чтобы получившаяся ломаная не прошла через  $Z$ ).

В общем случае утверждается, что найдутся такие (различные) вершины  $A$  и  $B$  многоугольника  $P$ , что все внутренние точки отрезка  $AB$  лежат строго внутри  $P$ , причём  $X$  и  $Y$  лежат на разных дугах границы  $P$  (или совпадают с  $A$  или  $B$ ). Если это удастся доказать, то можно разрезать многоугольник этим отрезком (у каждого из них будет строго меньше вершин) и применить предположение индукции к парам точек  $(X, C)$  и  $(C, Y)$  для подходящей  $C \in AB$  (отличной от  $Z$ ).

Посмотрим на соседние вершины  $E, F$  с вершиной  $X$ . Если в треугольнике  $XEF$  нет других вершин многоугольника (и  $X \notin EF$ ), то можно взять  $A = E, B = F$ . Если там есть другие вершины (и всё ещё  $X \notin EF$ ), то возьмём  $A = X$  и в качестве  $B$  выберем вершину  $P$  из этого треугольника, которая дальше всего от  $EF$ , но при этом отлична от  $X$ . Наконец, если  $X \in EF$ , то возьмём  $A = X$  и в качестве  $B$  выберем подходящую вершину  $P$ , которая по ту же сторону от  $EF$ , что и сам многоугольник  $P$  в малой окрестности точки  $X$  (найдётся такая вершина, которая видна из  $X$ , то есть что внутренние точки  $AB$  лежат внутри  $P$ ).

**Критерии.** Если приведена комбинаторная конструкция, но не доказывается технический факт о возможности получения равных площадей, то ставится 5 баллов (доказательства в духе «можно взять дугу границы многоугольника и непрерывно деформировать её в другую, в какой-то момент площадь будет нужная» достаточно).