



Решения задач для 5 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить однозначные числа без повторов так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?

Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (М. В. Карлукова)

Ответ: да — например, так:

7	4	3	8
6	1	2	5

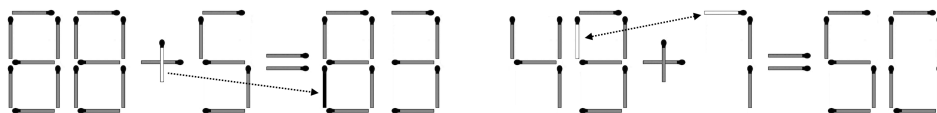
Критерии. Просто пример — 7 баллов (число 0 тоже можно использовать). Ответ «да» с неверным примером или без примера — 0 баллов.

2. Первоклассник Паша выложил из спичек пример $88 + 5 = 93$ (см. справа). Учитель поставил ему пятёрку.

(а) Помогите первокласснику Андрею тоже получить пятёрку, переложив в Пашином примере ровно одну спичку так, чтобы равенство осталось верным. $88 + 5 = 93$

(б) Придумайте свой верный пример из 5 различных цифр, выложенных спичками, так что в нём можно переложить одну спичку от одной цифры к другой, чтобы снова получилось верное равенство (иными словами, знаки арифметических операций изменять нельзя, а знак « $=$ » нельзя перечёркивать). Образцы всех цифр представлены справа. (П. Д. Муленко)

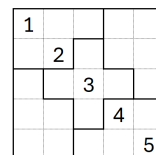
Ответ: а) $88 - 5 = 83$; б) например, $43 + 7 = 50$ превращается в $49 + 1 = 50$.



Критерии. Только пункт а — 2 балла; только пункт б — 5 баллов.

3. Сколько решений имеет фигурное sudoku, изображённое справа? Не забудьте доказать, что никаких других решений нет.

Примечание. По правилам фигурных sudoku 5×5 во всех строках, столбцах и выделенных блоках должны встречаться все цифры от 1 до 5.



(М. В. Карлукова)

Ответ: 2 решения.

Решение. В центральном кресте цифра 4 может стоять или в левой, или в верхней пустых клетках. Если поставить 4 в верхнюю клетку, то всё остальное sudoku решается однозначно (см. рис. слева, очередность выставления цифр указана в правом нижнем углу клеток).

Если же поставить 4 в левую клетку, то после выставления всех четвёрок однозначно восстановить следующие цифры не получается. Поэтому рассмотрим два случая, какая цифра может стоять в верхней клетке центрального креста (1 или 5). Если там стоит 1, то остальное sudoku решается однозначно (см. центральный рис.); если же там стоит 5, то тем или иным путём получается противоречие (пример на рисунке справа — в правой нижней фигуре некуда поставить 1).

1	4	5	3	2
3	2	4	5	1
2	5	3	1	4
5	1	2	4	3
4	3	1	2	5

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

1	5	4		
3	2	5	1	4
	4	3	2	
		1	4	1
4		1	1	5

Критерии. Указаны оба верных решения без обоснования, что других решений нет – 2 балла.

4. Маша и Костя по очереди ставят в клетки шахматной доски знаки + и – (начинает Костя) по следующим правилам:

- каждым ходом игрок выбирает произвольную свободную клетку и ставит в неё один знак по своему выбору;
- если после хода игрока в клетку некоторого цвета оказалось, что в клетках этого цвета стало поровну плюсов и минусов, то игрок автоматически считается проигравшим;
- после заполнения доски отдельно для чёрных и белых клеток вычисляется, каких знаков оказалось больше: если в одном цвете больше плюсов, а в другом больше минусов, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (П. Д. Муленко)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу, первым ходом поставив противоположный Костиному знак в клетку противоположного цвета.

Решение. Допустим, Костя первым ходом поставил + в чёрную клетку. Это означает, что в чёрных клетках всегда будет больше плюсов, чем минусов (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва уравнивать количество знаков, что автоматически считается поражением). Таким образом, Маше достаточно будет первым своим ходом поставить – в белую клетку, чтобы в белом цвете было больше минусов. Для остальных трёх вариантов хода Кости (+ в белую, – в чёрную, – в белую) применимо такое же рассуждение.

Критерии. Только верный ответ (Маша) – 0 баллов. Верно указан первый Машин ход, но не объяснено, почему он приводит к победе – 2 балла. За замечание, что результат для каждого из цветов определяется первым поставленным туда знаком, ставится 2 балла.

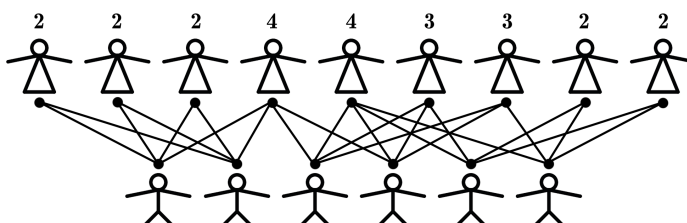
5. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

- Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
- Среди них есть пять девочек, каждая из которых знакома ровно с двумя мальчиками.
- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с тремя мальчиками каждая.
- Каждый мальчик знаком с четырьмя девочками.

Какое наименьшее количество девочек могли прийти на олимпиаду? Не забудьте доказать, что это действительно минимальное количество. (Л. С. Корешкова)

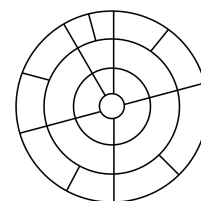
Ответ: 9 девочек.

Решение. Если x – количество девочек с тремя знакомствами, то общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 3x = 18 + 3x$. Раз каждый мальчик знаком с 4 девочками, то количество знакомств должно делиться на 4. Минимальное x , при котором это выполняется, равно 2. Итого количество девочек не меньше $2 + 5 + 2 = 9$. Пример для 9 девочек показан ниже.



Критерии. Только пример — 2 балла. Только оценка — 3 балла. Только ответ (9) — 0 баллов.

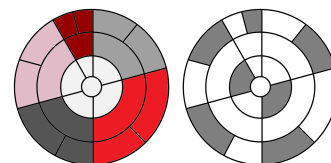
6. Офис компании расположен на отдельном этаже бизнес-центра (см. рис.). В каждой комнате находится отдел, которым руководит менеджер. Директор компании решил повысить некоторых руководителей отделов до главных менеджеров. Однако нельзя допустить, чтобы двумя соседними отделами руководили главные менеджеры (иначе они будут спорить через стенку, кто из них главнее). Какое максимальное количество менеджеров можно повысить в должности? Не забудьте объяснить, почему оно действительно максимальное. (И. М. Туманова)



Ответ: 7 менеджеров.

Решение. Разделим офис на 6 зон (показаны разными цветами на картинке слева).

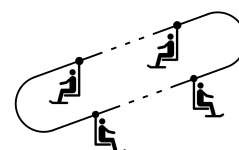
В центральной зоне не более двух главных менеджеров (если повысили центрального, то остальных нельзя повысить; если нет, то среди 5 расположенных вокруг него можно выбрать максимум двоих). А в каждой из остальных 5 зон не более одного главного менеджера. Итого можно повысить не более 7 менеджеров.



Пример, как повысить семерых, показан справа.

Критерии. Только ответ (7) — 0 баллов. Ответ с примером, но без оценки — 2 балла. Если в оценке не разобрана часть случаев (например, рассмотрены только случаи, когда менеджер в центральной комнате не повышен) — не более 5 баллов. «Жадные» рассуждения (например, «чтобы результат был максимальным, нужно, чтобы во внешнем кольце было как можно больше главных менеджеров») некорректны.

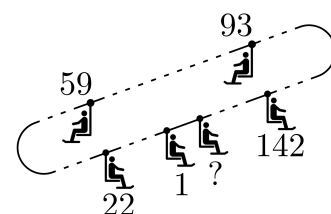
7. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике. (Л. С. Корешкова)



Ответ: 154.

Решение.

Заметим, что кресла 22 и 142 должны находиться с одной стороны, а 59 и 93 с другой (если бы с одной стороны находились 22 и 93, а с другой 59 и 142, то порядок следования кресел нарушался бы). Значит, между 142 и 22 столько же кресел, сколько между 59 и 93, то есть $93 - 59 - 1 = 33$ кресла. Из них 21 кресло имеют номера от 1 до 21, значит, у 12 кресел номера больше 142. Получается, всего кресел $142 + 12 = 154$.



Критерии. Дан верный ответ (154) без каких-либо обоснований — 1 балл.

Решение верное, но то, что 22 и 142 с одной стороны, никак не обосновано (а просто сразу нарисовано без комментариев) — штраф 1 балл. Ошибки в ± 1 при подсчёте расстояний между креслами, влияющие на ответ — штраф в 2 балла. Арифметические ошибки — штраф в 1 балл.