



Решения задач для 6 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Можно ли в прямоугольнике 2×4 разместить все числа от 1 до 8 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?

Примечание. Напомним, что простое число — это целое число, большее 1, которое делится только на единицу и само на себя. (М. В. Карлукова)

Ответ: да — например, так:

7	4	3	8
6	1	2	5

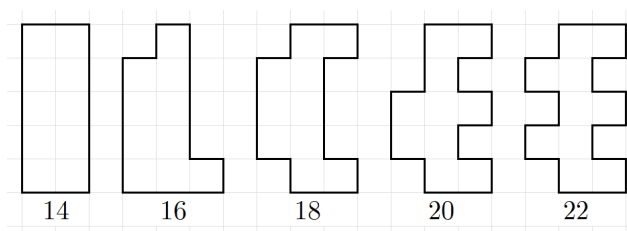
Критерии. Просто пример — 7 баллов. Ответ «да» с неверным примером или без примера — 0 баллов. Число 0, в отличие от задачи для 5 класса, использовать нельзя.

2. На самостоятельной работе учитель выдал каждому из 10 учеников клетчатый листок с нарисованным на нем многоугольником, составленным из 10 клеток (разным детям могли достаться разные многоугольники), и попросил вычислить периметр этого многоугольника. Оказалось, что у всех учеников разные ответы от 13 до 22. Какое наименьшее количество неправильных ответов среди них? (С. П. Павлов)

Ответ: 5 (все нечётные).

Решение. Докажем, что периметр всегда чётный. Действительно, обведём фигуру по периметру, вернувшись в исходную точку. Поскольку рисование завершится в той же вершине, где и начиналось, то число единичных отрезков, проведённых нами вверх, равно числу единичных отрезков, проведённых вниз. Значит, суммарное число вертикальных отрезков чётно. С горизонтальными отрезками аналогично. Итак, у такого многоугольника периметр чётный, поэтому все нечётные ответы неверные.

Для чётных периметров строятся примеры:



Критерии. 1 балл — ответ с указанием, что все чётные результаты получить можно, а нечётные нельзя (или с прямым перечислением, какие можно, а какие нельзя).

Ещё 3 балла — примеры (5 верных примеров — 3 балла, 4 примера — 2 балла, 3 примера — 1 балл, меньше — 0).

Ещё 3 балла — доказательство, что нечётных периметров не бывает.

3. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 знаки + и – (начинает Костя) по следующим правилам:

- перед каждым ходом игрок выбирает знак и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранный знак в произвольной свободной клетке доски;
- если после очередного хода игрока плюсов и минусов выбранного им цвета стало поровну, то игрок автоматически считается проигравшим;

- после заполнения доски для каждого цвета вычисляется, каких знаков оказалось больше: если минусов больше в одном или трёх цветах, то побеждает Маша, иначе побеждает Костя.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (П. Д. Муленко)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил + синим цветом. Это означает, что среди синих знаков всегда будет больше плюсов, чем минусов (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва уравнивать количество знаков, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какой-либо знак *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* знак так, чтобы в итоге больше минусов оказалось в одном или трёх цветах. После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не уравнивали количество знаков в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит знак вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить знак вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов было больше минусов.

Критерии. За замечание, что результат для каждого из цветов определяется первым знаком этого цвета, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

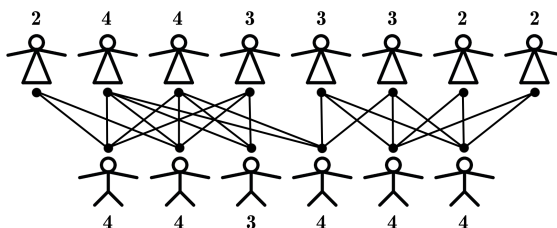
4. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

- Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
- Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
- Ни один мальчик не знаком более чем с четырьмя девочками.

Какое наибольшее количество девочек могли прийти на олимпиаду, если всего пришло 15 детей? Не забудьте доказать, что это действительно максимальное количество. (Л. С. Корешкова)

Ответ: 8 девочек.

Решение. Пусть x — число девочек, знающих по два мальчика; тогда мальчиков $15 - 2 - 3 - x = 10 - x$. Тогда количество знакомств не превосходит $4 \cdot (10 - x) = 40 - 4x$ (так как каждый мальчик знает не более 4 девочек), и при этом, с точки зрения девочек, оно равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. То есть $17 + 2x \leq 40 - 4x$, откуда $x \leq 3$. То есть максимум могло прийти $2 + 3 + 3 = 8$ девочек. Пример для 8 девочек показан ниже.



Критерии. Только пример — 2 балла. Только оценка — 3 балла. Только ответ (8) — 0 баллов.

5. Обозначим произвольное трёхзначное число как $\overline{fdi}$, где каждая буква обозначает отдельную цифру. Сколько существует таких чисел $\overline{fdi}$, что $\overline{idf}$ кратно $\overline{fdi}$? (Л. С. Корешкова)

Ответ: 90.

Решение. Если $\overline{idf} : \overline{fdi}$, то и $(\overline{idf} - \overline{fdi}) : \overline{fdi}$, а $\overline{idf} - \overline{fdi} = (100i + 10d + f) - (100f + 10d + i) = 99i - 99f = 99(i - f)$, то есть $99(i - f) = (9 \cdot 11 \cdot (i - f)) : \overline{fdi}$.

Это очевидно выполняется при $f = i$, так как тогда $\overline{fdi} = \overline{idf}$. Таких чисел 90 штук (9 вариантов для цифры $f = i$, так как она не может быть нулём, и 10 вариантов для цифры d).

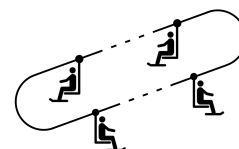
Если же $f \neq i$, то $f - i \geq 2$ (иначе $99(i - f) \leq 100$) и $f - i \leq 9 - 1 = 8$, откуда непосредственным перебором убеждаемся, что подходящих чисел не найдётся:

- при $i - f = 2$: $99(i - f) = 198$, но 891 не делится на 198;

- при $i - f = 3$: $99(i - f) = 297$, но 792 не делится на 297;
- при $i - f = 4$: $99(i - f) = 396$: 396, 198, 132, но ни одно не подходит;
- при $i - f = 5$: $99(i - f) = 495$: 495, 165, но оба не подходят;
- при $i - f = 6$: $99(i - f) = 594$: 594, 297, 198, но ни одно не подходит;
- при $i - f = 7$: $99(i - f) = 693$: 693, 231, но оба не подходят;
- при $i - f = 8$: $99(i - f) = 792$: 792, 396, 264, 198, 132, но все не подходят.

Критерии. 1 балл за указание, что подходят все числа вида $\overline{f d f}$, и ещё 1 балл за верное указание их количества (90 штук). 5 баллов за доказательство того, что других чисел нет.

6. Кресла на кресельном подъёмнике Розы Хутор пронумерованы последовательно: 1, 2, 3 и т. д. Расстояния между каждыми двумя соседними сиденьями одинаковы. Во время грозы кресельный подъёмник остановился, и в этот момент кресло 22 находилось на одной высоте с креслом 59, а кресло 93 — на той же высоте, что и кресло 142. Определите количество кресел на кресельном подъёмнике.

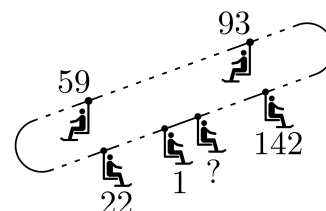


(Л. С. Корешкова)

Ответ: 154.

Решение.

Заметим, что кресла 22 и 142 должны находиться с одной стороны, а 59 и 93 с другой (если бы с одной стороны находились 22 и 93, а с другой 59 и 142, то порядок следования кресел нарушался бы). Значит, между 142 и 22 столько же кресел, сколько между 59 и 93, то есть $93 - 59 - 1 = 33$ кресла. Из них 21 кресло имеют номера от 1 до 21, значит, у 12 кресел номера больше 142. Получается, всего кресел $142 + 12 = 154$.



Критерии. Дан верный ответ (154) без каких-либо обоснований — 1 балл.

Решение верное, но то, что 22 и 142 с одной стороны, никак не обосновано (а просто сразу нарисовано без комментариев) — штраф 1 балл. Ошибки в ± 1 при подсчёте расстояний между креслами, влияющие на ответ — штраф в 2 балла. Арифметические ошибки — штраф в 1 балл.

7. У Софьи есть семь подруг: Алина, Бэлла, Вика, Галя, Дана, Елена, Жанна. Их фотографии (всего 7 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 13 ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)?

(С. П. Павлов)

Ответ: всегда.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).

Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.

Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.

Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Бэллы и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Бэллы лежат на месте (внизу правой стопки).

Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем 12 ходов получится, что внизу правой стопки лежат 6 фотографий в нужном порядке. Если фото Жанны в левой стопке, то 13-м ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов.

Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Жанны на место — штраф в 1 балл.