



Решения задач для 7 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Можно ли в квадрате 3×3 разместить все числа от 1 до 9 так, чтобы сумма любых двух чисел, соседних по стороне, являлась простым числом?
(М. В. Карлукова)

Ответ: нет.

Решение. В соседних клетках обязательно стоят числа разной чётности (иначе они в сумме дают чётное число больше 2, то есть обязательно составное). То есть в центральной клетке обязательно стоит нечётное число, которое будет складываться со всеми четырьмя чётными числами, однако для любой нечётной цифры хотя бы одна из сумм будет составным числом: $1 + 8 = 3 + 6 = 5 + 4 = 7 + 2 = 9$, $9 + 6 = 15$.

Критерии. За замечание о том, что в соседних клетках стоят числа разной четности, ставится 2 балла.

2. Катя нарисовала у себя в тетради квадраты с чётными сторонами от 2 клеток до 2024 клеток. Ира же под каждым Катиным квадратом нарисовала прямоугольник с тем же периметром, но на 1 меньшей ширины, чем у квадрата. У кого из девочек получилась большая суммарная площадь (в клетках) и на сколько?
(П. Д. Муленко)

Ответ: У Кати получилось больше на 1012 клеток.

Решение. Рассмотрим произвольный Катин квадрат со стороной x . Тогда Ира под ним нарисовала прямоугольник со сторонами $x - 1$ и $x + 1$ (чтобы периметр не изменился), у которого площадь равна $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Таким образом, каждый Ирин прямоугольник имеет площадь на 1 меньшую, чем у Катиного квадрата. А поскольку Катя нарисовала $2024 : 2 = 1012$ квадратов, то у неё и суммарная площадь больше на 1012 клеток.

Критерии. Показано, что площадь соответствующего квадрата на 1 больше площади прямоугольника — 5 баллов.

3. Найдите все четвёрки различных цифр $a < b < c < d$, такие что $\overline{ab} \cdot \overline{dc} = \overline{ba} \cdot \overline{cd}$.

Примечание. Запись $\overline{ab}$ означает двузначное число, составленное из цифр a и b .

(Л. С. Корешкова)

Ответ: таких четвёрок 5: (1, 2, 3, 6); (1, 2, 4, 8); (2, 3, 4, 6); (2, 3, 6, 9); (3, 4, 6, 8).

Решение. $\overline{ab} \cdot \overline{dc} = (10a + b)(10d + c) = 100ad + 10ac + 10bd + bc$; аналогично $\overline{ba} \cdot \overline{cd} = 100bc + 10bd + 10ac + ad$. Приравнивая эти выражения, получаем $a \cdot d = b \cdot c$.

- Среди цифр точно нет цифр 0, 5, и 7 (иначе две пары заведомо не построить из различных цифр).
- Если наименьшая из цифр (то есть a) равна 1, то подходят варианты $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ и $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, то есть две группы: (1, 2, 3, 6) и (1, 2, 4, 8).
- Если $a = 2$, то есть ещё две группы: (2, 3, 4, 6) и (2, 3, 6, 9).
- Если $a = 3$, то есть ещё одна группа: (3, 4, 6, 8).

Дальше групп не находится, то есть четвёрок всего 5.

Критерии. Показано, что среди цифр нет 0, 5 и 7, — 3 балла. За любой потерянный принципиальный случай при переборе вычитается 2 балла. При полностью описанной системе перебора и рассмотрении всех принципиальных случаев за потерю одного из вариантов внутри случая вычитается 1 балл.

4. Костя и Маша по очереди ставят в клетки доски 8×8 числа $+1$ и -1 (начинает Костя) по следующим правилам:

- перед каждым ходом игрок выбирает число и цвет (красный, зелёный или синий), которым напишет выбранное число в произвольной свободной клетке доски;
- если после хода игрока сумма чисел выбранного им цвета оказалась равной нулю, этот игрок автоматически считается проигравшим;
- после заполнения доски подсчитываются суммы чисел каждого цвета: если произведение этих сумм положительно, то побеждает Костя, а если отрицательно — то Маша; если какой-либо цвет так и не был использован, он не участвует в подсчёте.

Кто может обеспечить себе победу и как для этого необходимо действовать? (П. Д. Муленко)

Ответ: Маша может обеспечить себе победу.

Стратегия. Допустим, Костя первым ходом поставил +1 синим цветом. Это означает, что сумма синих чисел всегда будет положительна (чтобы это изменить, кому-то из игроков придётся сперва сделать её равной нулю, что автоматически считается поражением). Поэтому Маше ничего не остаётся, кроме как повторять Костины ходы в том же цвете, до тех пор, пока Костя не решит поставить какое-либо число *вторым цветом*, после чего ей останется поставить *третьим цветом* поставить число так, чтобы в итоге в одном или трёх цветах оказалась отрицательная сумма (что и обеспечит отрицательное произведение). После этого ход игры не имеет значения, Маше достаточно следить, чтобы её ходы не обнуляли сумму в каком-либо из цветов.

Единственным исключением является ситуация, если Костя так никогда и не поставит число вторым цветом. В этой ситуации Маше надо будет последним ходом поставить число вторым цветом так, чтобы ровно в одном из двух цветов сумма оказалась отрицательна.

Если же Костя первым ходом поставил -1 , то Маша действует точно также: при добавлении второго цвета она добавляет третий с нужным знаком, а иначе последним ходом ставит $+1$ другим цветом.

Критерии. За замечание, что сумма чисел одного цвета определяется первым слагаемым, ставится 2 балла. За стратегию в исключительном случае даётся 1 балл. Если стратегия описана, но забыто исключение, то за задачу ставится не больше 5 баллов.

5. У Софьи есть десять подруг: Алина, Валерия, Диана, Екатерина, Жанна, Инна, Карина, Лилия, Марина, Ольга. Их фотографии (всего 10 штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более 21 хода, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (С. П. Павлов)

Ответ: да; Софье всегда хватит даже 19 ходов.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).

Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.

Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.

Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Валерии и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Валерии лежат на месте (внизу правой стопки). Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем 18 ходов получится, что внизу правой стопки лежат 9 фотографий в нужном порядке. Если фото Ольги в левой стопке, то 19-м ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов.

Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Ольги на место — штраф в 1 балл.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

- Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
- Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.

- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
- Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
- Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько?

(Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за x , тогда общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связан, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин: $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$, где m — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом, $m = x + 13 = (x + 5) + 8$, где $x + 5$ — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчетах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.

Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.

Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране на некоторое постоянное значение (вся остальная информация верна).

Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести соответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

Другой автомат выводит все числа на экране на 2 больше, чем они есть на самом деле.

Бургер: \$2

Другой автомат выводит все числа на 8 меньше, чем они есть на самом деле.

Бургер: \$10

Какова реальная цена бургера?

(П. Д. Муленко)

Ответ: \$5.

Решение. Из высветившихся текстов следует, что первый автомат уменьшает все числа на некоторое значение (пусть x), а второй автомат, наоборот, увеличивает все числа на некоторое значение (пусть y). Тогда первый автомат выводит реальное увеличение второго автомата y , уменьшенное на x , и получается 2; а второй автомат выводит реальное уменьшение первого автомата x , увеличенное на y , и получается 8:

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ x + y = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5, \\ x = 3. \end{cases}$$

Таким образом, бургер в реальности стоит $2 + x = 10 - y = 2 + 3 = 10 - 5 = 5$ долларов.

Критерии. Вычислено, на сколько именно изменяет значение один из автоматов, без нахождения итогового ответа — 6 баллов. Составлено, но не решено, уравнение (или система уравнений), приводящее к верному ответу — 4 балла.