



## Решения задач для 8 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Фигура «слонь» делает один ход как слон, следующий — как конь, далее — как слон и т.д. (иными словами, ходы слона и коня чередуются). Может ли она обойти шахматную доску, побывав на каждой клетке ровно один раз? (О. А. Пяйве)

**Ответ:** да. Пример показан ниже: слонь начинает путь на клетке под номером 1 ходом слона в клетку 2, потом конём в клетку 3 и т.д. (клетки, куда он попадает ходом слона, отмечены жирным шрифтом). Заметим, что в этом примере каждая из четвертей доски обходится одинаковым образом.

|   |           |           |           |    |           |           |           |           |
|---|-----------|-----------|-----------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 8 | <b>52</b> | <b>58</b> | <b>64</b> | 49 | <b>36</b> | 45        | 47        | <b>38</b> |
| 7 | 61        | <b>56</b> | 53        | 59 | <b>42</b> | <b>40</b> | <b>34</b> | <b>44</b> |
| 6 | <b>63</b> | <b>50</b> | 55        | 57 | <b>48</b> | 37        | 39        | <b>46</b> |
| 5 | <b>54</b> | <b>60</b> | <b>62</b> | 51 | 33        | 43        | 41        | 35        |
| 4 | <b>20</b> | <b>26</b> | <b>32</b> | 17 | 4         | 13        | 15        | <b>6</b>  |
| 3 | 29        | <b>24</b> | 21        | 27 | <b>10</b> | <b>8</b>  | <b>2</b>  | <b>12</b> |
| 2 | 31        | <b>18</b> | 23        | 25 | <b>16</b> | 5         | 7         | <b>14</b> |
| 1 | <b>22</b> | <b>28</b> | <b>30</b> | 19 | 1         | 11        | 9         | 3         |
|   | a         | b         | c         | d  | e         | f         | g         | h         |

**Критерии.** Пример — 7 баллов.

Рассуждение «может, потому что конь каждым ходом меняет цвет клетки, а слон нет» — 2 балла. Если приведено решение только для одной четверти — 4 балла

2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получился 431 такой кубик. Могло ли такое произойти? Если да, то найдите все варианты общего количества кубиков. (Л. С. Корешкова)

**Ответ:** Да, могло, если у Паши изначально был  $11^3 = 1331$  кубик.

**Решение.** Пусть ребро большого куба состоит из  $n$  рёбер маленьких кубиков. Закрасить 4 грани куба можно двумя путями: «кольцом», оставляя незакрашенными две противоположные грани, и «полкой», оставляя незакрашенными две смежные грани.

В «кольце» общее количество покрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 4 рёбрах, которые были посчитаны дважды, то есть  $4n^2 - 4n$ .

В «полке» общее количество покрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 5 общих рёбрах плюс 2 вершины куба, в которых сходятся тройки граней и рёбер (так как мы их до этого по 3 раза учли в гранях и по 3 раза вычли в рёбрах), то есть  $4n^2 - 5n + 2$ .

Далее можно действовать по-разному.

**Первый способ.** Если  $n \leq 10$ , то Паша закрасил менее чем  $4n^2 \leq 400$  кубиков, а если  $n \geq 12$ , то более чем  $4n^2 - 5n > 4n(n - 2) \geq 4 \cdot 12 \cdot 10 = 480$  кубиков. Таким образом, если у Паши и

мог получиться 431 закрашенный кубик, то только при  $n = 11$  — действительно, при окраске «полкой» у него как раз получился бы  $4 \cdot 11^2 - 5 \cdot 11 + 2 = 431$  закрашенный кубик.

**Второй способ.** Надо найти натуральные корни каждого из двух уравнений:  $4(n^2 - n) = 431$  (для окраски «кольцом») и  $4n^2 - 5n + 2 = 431$  (для окраски «полкой»). Решение обоих уравнений с помощью дискриминанта даёт иррациональные решения в первом уравнении и корни  $\frac{5 \pm 83}{8}$  во втором, только один из которых является натуральным (а именно  $n = \frac{5 + 83}{8} = 11$ ).

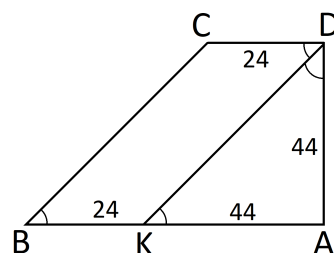
**Критерии.** 3 балла — получены квадратные уравнения без дальнейших верных продвижений.

4 балла — полностью посчитан один из двух случаев: полка или кольцо.

3. В трапеции  $ABCD$  основание  $CD$  равно 24,  $AD = 44$ , а угол  $B$  в 2 раза меньше угла  $D$ . Какова максимально возможная площадь трапеции? (Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

**Ответ:** 2024.

**Решение.** Проведём биссектрису  $DK$  угла  $D$ , где  $K$  — точка на основании  $AB$ . Тогда  $\angle CDK = \angle CBK$  по условию (то есть  $DCBK$  — параллелограмм, то есть  $BK = CD = 24$ ) и  $\angle CDK = \angle DKA$  как накрест лежащие (то есть  $\triangle ADK$  — равнобедренный, и  $AK = AD = 44$ ). Максимальная площадь требует максимальной высоты, что достигается, когда  $\triangle ADK$  прямоугольный (иными словами, высота трапеции заведомо не больше боковой стороны). Итого максимальная площадь равна  $\frac{24 + 68}{2} \cdot 44 = 2024$ .



**Критерии.** Рассуждения про биссектрису и равнобедренный треугольник — 2 балла.

Если не обосновано, что  $DCBK$  — параллелограмм, — штраф в 2 балла.

4. Два продуктовых автомата продают один и тот же бургер, но каждый из них сломан и изменяет все числа на экране в некоторое постоянное количество раз (вся остальная информация верна). Компания, обслуживающая эти автоматы, на время ремонта решила вывести соответствующие уведомления. На экранах при этом высветилось следующее:

Другой автомат выводит все числа на экране на 100% больше, чем они есть на самом деле.

Бургер: \$2

Другой автомат выводит все числа в 6 раз меньше, чем они есть на самом деле.

Бургер: \$12

Какова реальная цена бургера?

(П. Д. Муленко)

**Ответ:** \$4.

**Решение.** Из высветившихся текстов следует, что первый автомат уменьшает все числа в некоторое постоянное положительное число раз (пусть  $x$ ), а второй автомат, наоборот, увеличивает все числа в некоторое постоянное число раз (пусть  $y$ ). Тогда первый автомат выводит реальное увеличение второго автомата  $y$  в процентах, уменьшенное в  $x$  раз, и получается 100%; а второй автомат выводит реальное уменьшение первого автомата  $x$ , увеличенное в  $y$  раз, и получается 6:

$$\begin{cases} \frac{(y-1) \cdot 100\%}{x} = 100\%, \\ x \cdot y = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = x, \\ xy = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1, \\ x(x + 1) = 6. \end{cases}$$

Второе уравнение можно решить как квадратное. Но можно и просто угадать единственный положительный корень  $x = 2$  (он единственен, поскольку чем больше положительное число  $x$ , тем больше величина  $x(x + 1)$ ). Итак,  $x = 2$  и  $y = 3$ . Таким образом, бургер в реальности стоит  $2 \cdot x = 12 : y = 4$  доллара.

**Критерии.** Подобранный ответ с проверкой, что он подходит под все условия — 2 балла.

5. У Софьи есть  $N$  друзей с разными именами: Алина, Бэлла, Вика, ..., Яна. Их фотографии (всего  $N$  штук — по одной на каждую подругу) лежат у Софьи в двух стопках в случайном порядке. За один ход Софья берёт несколько (одну или более) подряд лежащих фотографий с верха любой

стопки и, не меняя порядка, кладёт их сверху другой стопки. Всегда ли Софья, сделав не более  $2N + 1$  ходов, сможет сложить фотографии всех подруг в одну стопку, упорядоченную по алфавиту их имён (считая снизу вверх)? (С. П. Павлов)

Ответ: да; Софье всегда хватит даже  $2N - 1$  ходов.

Решение. Первым ходом сделаем из двух стопок одну (назовём её левой).

Вторым ходом переместим в правую стопку фотографию Алины и все, которые над ней. За 2 хода фотография Алины оказалась внизу правой стопки.

Третьим ходом перенесём всё из правой стопки, кроме фото Алины, в левую стопку.

Четвёртым ходом переносим в правую стопку фотографии Бэллы и все лежащие над ней. В результате после 4-го хода фотографии Алины и Бэллы лежат на месте (внизу правой стопки).

Продолжаем так действовать, тратя два хода на каждую очередную фотографию. (Возможно, в каких-то случаях ничего переносить не придётся, тогда мы сэкономим ходы.) После не более чем  $2(N - 1)$  ходов получится, что внизу правой стопки лежат  $N - 1$  фото в нужном порядке. Если фото Яны в левой стопке, то последним ( $2N - 1$ -м) ходом перенесём его в правую, а если в правой, то оно уже в нужном месте (наверху).

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Любые рассуждения, приводящие к ответу «нет», стоят 0 баллов.

Идея положить за два хода на место первую фотографию — 3 балла. Забыли вернуть фотографию Яны на место — штраф в 1 балл.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

- Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
- Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
- Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
- Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько? (Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за  $x$ , тогда общее число знакомств равно  $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$ . С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связан, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин:  $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$ , где  $m$  — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом,  $m = x + 13 = (x + 5) + 8$ , где  $x + 5$  — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчётах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.

Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.

Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Александра, Владимир, Любовь и Оксана выписывают натуральные числа, состоящие из пяти различных ненулевых цифр.

- Александра выписывает все числа, у которых первая цифра — 1.
- Владимир выписывает все числа, первые две цифры которых — 1 и 2 в любом порядке.
- Любовь выписывает все числа, первые три цифры которых — это 1, 2 и 3 в любом порядке.
- Оксана выписывает все числа, первые 4 цифры которых — 1, 2, 3 и 4 в любом порядке.

Сколько пятизначных чисел из различных ненулевых цифр не появились ни в одном из списков?  
(Л. С. Корешкова)

**Ответ:** 13075 чисел.

**Решение.** Всего пятизначных чисел с различными цифрами  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ .

Сперва Александра выпишет все числа, начинающиеся с цифры 1:  $1 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) = 1680$  чисел.

Затем Владимир дополнительно выпишет числа, начинающиеся на 21:  $1 \cdot 1 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5) = 210$  чисел.

После этого Любовь допишет числа, начинающиеся на 231, 312 и 321, всего  $3 \cdot (6 \cdot 5) = 90$  чисел.

Наконец, Оксана допишет те числа, которые начинаются на 2341, 2413, 2431, 3412, 3421, 3142, 3241, а также числа, первая цифра которых 4, после чего идут цифры 1, 2 и 3 в произвольном порядке:  $(7 + 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 5 = 65$  чисел.

Итого не будет выписано  $15120 - 1680 - 210 - 90 - 65 = 13075$  чисел.

**Критерии.** Подсчёт какого-то из количеств: всех чисел, чисел Любы, Владимира, Саши, Оксаны — по одному баллу (но в сумме не больше 3). Решение, где всё подсчитали верно, но не учли повторы — 3 балла. Арифметическая ошибка — штраф в 1 балл каждая. Ошибка из-за неучета пересечений или перестановок — штраф в 2 балла.