



Решения задач для 9 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

1. Несколько ребят решили устроить серию испытаний на выбывание, победитель которой получит звание короля класса. В интервью школьной газете победитель рассказал следующее:

- (а) В первом и последнем испытаниях в сумме вышло столько же, сколько во всех остальных вместе взятых.
(б) Во втором испытании вышло столько же, сколько и во всех последующих вместе взятых.
(с) В первом испытании вышло меньше всего участников.

Докажите, что он где-то ошибся.

(П. Д. Муленко)

Примечание. По этой задаче было следующее добавление к условию: испытаний не менее четырёх; количество выбывших в первом испытании строго меньше, чем в любом другом.

Решение. Обозначим количество выбывших в первом испытании через a , во втором — через b , с третьем — через c , в последнем — через z , в остальных (если они были) — через M . Первые два условия записываются так: $a + z = b + c + M$, $b = c + M + z$. Подставляя второе в первое, получаем, что $a + z = 2c + 2M + z$, то есть $a = 2(c + M)$. Но это противоречит последнему условию, по которому a должно быть меньше c .

Примечание. Добавление, что испытаний не менее четырёх, существенно. Иначе подошёл бы, например, случай, где испытаний всего 3, в первом вышло 0 человек, а в третьем столько же, сколько во втором. В качестве упражнения попробуйте понять, что именно некорректно в вышеприведённом решении, если испытаний только три.

Критерии. 1 балл — условие переписано в терминах неравенств.

2. Конструктор состоит из белых кубиков. Паша собирает из кубиков большой куб, затем выбирает 4 грани куба и красит их в красный цвет. После чего разбирает большой куб и считает кубики, у которых по крайней мере одна грань окрашена в красный цвет. У Паши получилось больше 500, но меньше 600 таких кубиков. А сколько именно? Найдите все варианты. (Л. С. Корешкова)

Ответ: У Паши могло получиться 518 или 528 кубиков.

Решение. Пусть ребро большого куба состоит из n рёбер маленьких кубиков. Закрасить 4 грани куба можно двумя путями: «кольцом», оставляя незакрашенными две противоположные грани, и «полкой», оставляя незакрашенными две смежные грани.

В «кольце» общее количество покрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 4 рёбрах, которые были посчитаны дважды, то есть $4n^2 - 4n$.

В «полке» общее количество покрашенных кубиков равно количеству кубиков в 4 гранях минус количество кубиков в 5 общих рёбрах плюс 2 вершины куба, в которых сходятся тройки граней и рёбер (так как мы их до этого по 3 раза учли в гранях и по 3 раза вычли в рёбрах), то есть $4n^2 - 5n + 2$.

Далее можно действовать по-разному.

Первый способ. Если $n \leq 11$, то Паша покрасил менее чем $4n^2 \leq 484$ кубика, а если $n \geq 13$, то более чем $4n^2 - 5n \geq 4 \cdot 13^2 - 5 \cdot 13 = 169 \cdot 4 - 65 > 600$ (чем больше n , тем больше кубиков покрашено при любом способе).

Таким образом, от 500 до 600 кубиков могло получиться только при $n = 12$. В этом случае при окраске «кольцом» получается $4 \cdot (12^2 - 12) = 528$ окрашенных кубиков, а при окраске «полкой» — $4 \cdot 12^2 - 5 \cdot 12 + 2 = 518$ кубиков.

Второй способ. Надо найти решения в натуральных числах у хотя бы одного из двойных неравенств на число окрашенных кубиков:

$$\begin{cases} 500 \leq 4(n^2 - n) \leq 600, \\ 500 \leq 4n^2 - 5n + 2 \leq 600. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n^2 - 4n - 500 \geq 0, \\ 4n^2 - 4n - 600 \leq 0, \\ 4n^2 - 5n - 498 \geq 0, \\ 4n^2 - 5n - 598 \leq 0. \end{cases}$$

Непосредственное решение обеих систем неравенств даёт только одно натуральное решение (а именно $n = 12$), причём в обеих системах.

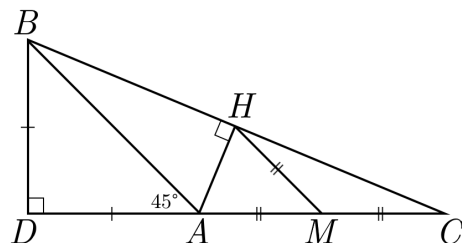
Критерии. 3 балла — доказано, что $n = 12$. Ещё по два балла за каждый ответ. Верно написана, но не решена система — 2 балла. Решение задачи только в одном из случаев (кольцо/полка) — 4 балла.

3. В треугольнике ABC угол A равен 135° , $AB = 14$, $BC = 26$. Точка H является основанием высоты из точки A , M — середина AC . Найдите HM . (Л. С. Корешкова)

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Решение. Продлим CA за точку A и опустим на получившийся луч перпендикуляр BD .

$\angle BAD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, то есть $\triangle BAD$ — равнобедренный прямоугольный, и $BD = DA = 7\sqrt{2}$. Треугольник BCD тоже прямоугольный, поэтому $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 17\sqrt{2}$, откуда $AC = DC - DA = 10\sqrt{2}$. HM является медианой из вершины прямого угла прямоугольного треугольника AHC , поэтому $HM = AC/2 = 5\sqrt{2}$.



4. Решите уравнение $[x]^2 + \{x\}^2 = 2x^2$. (Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части x .) (С. П. Павлов)

Ответ: $0, 1 - \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}, 3 - 3\sqrt{3}$.

Решение. Перепишем условие, используя, что $x = [x] + \{x\}$, и получим: $[x]^2 + \{x\}^2 = 2[x]^2 + 2\{x\}^2 + 4[x]\{x\}$, то есть $[x]^2 + \{x\}^2 + 4[x]\{x\} = 0$. Видим тривиальное решение $x = 0$; все остальные корни должны иметь отрицательную целую часть (иначе левая часть положительна).

Поделим уравнение на $[x]^2$ (ведь $[x] \neq 0$), сделаем замену $t = \frac{\{x\}}{[x]}$ и получим квадратное уравнение $t^2 + 4t + 1 = 0$ с корнями $t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Корень $t_1 = -2 - \sqrt{3}$ не подходит, так как тогда $\{x\} \geq 2 + \sqrt{3} \geq 1$. А при обратной подстановке $\frac{\{x\}}{[x]} = -2 + \sqrt{3}$ и условии $0 \leq \{x\} < 1$ получается, что возможные значения для целой части — $[x] \in \{-1; -2; -3\}$, откуда $x \in \{0, 1 - \sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}, 3 - 3\sqrt{3}\}$.

Критерии. Получено, что $x \geq 0$ — 2 балла. Верно решено квадратное уравнение — 2 балла. Каждый потерянный корень — штраф в 1 балл.

5. Назовём *униквадратной* дробь вида $\frac{1}{n^2}$, где n — натуральное число. Найдите максимальную униквадратную дробь, представимую в виде суммы двух униквадратных дробей.

(С. П. Павлов, А. А. Теслер)

Ответ: $\frac{1}{144}$ (представима в виде $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$).

Решение. Пусть $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$, тогда $p^2q^2 = p^2n^2 + q^2n^2$. Другими словами, (pn, qn, pq) является пифагоровой тройкой. Обозначим через g наибольший общий делитель чисел pn и qn . Тогда g делит pq , $(a, b, c) = (\frac{pn}{g}, \frac{qn}{g}, \frac{pq}{g})$ является примитивной пифагоровой тройкой (из попарно взаимно простых чисел), $n = \sqrt{\frac{gab}{c}}, p = \sqrt{\frac{gac}{b}}, q = \sqrt{\frac{gbc}{a}}$. Так как под корнями должны быть целые числа и a, b, c попарно взаимно просты, то все три числа a, b, c делят g .

Так как a или b делится на 3 (иначе c^2 давало бы остаток $a^2 + b^2 \equiv 2$ по модулю 3, что невозможно), то n тоже делится на 3. Кроме того, a или b делится на 4 (иначе $a^2 + b^2$ давало бы остаток 1 или 5 по модулю 8, но они не являются остатками точных квадратов), поэтому n делится на 4 (выражение под корнем делится на 4 благодаря a или b и ещё на 4 благодаря g). Следовательно, $n \geq 12$, и случай $n = 12$ реализуется при $a = 3, b = 4, c = 5, g = 60, p = 15, q = 20$.

Критерии. За пример ставится 3 балла, за оценку — 4.

6. Несколько детей пришли писать очный этап олимпиады.

- Среди них есть две девочки, каждая из которых знакома ровно с четырьмя мальчиками.
- Среди них есть три девочки, каждая из которых знакома ровно с тремя мальчиками.
- Остальные девочки (если имеются) знакомы ровно с двумя мальчиками каждая.
- Никакие два ребёнка одного пола не знакомы между собой.
- Любой ребёнок может передать шпаргалку в руки любому своему знакомому.

Оказалось, что любая девочка может отправить шпаргалку любому мальчику (даже незнакомому через других детей), но, стоит организаторам начать пристально следить хотя бы за одной парой знакомых детей, эта возможность нарушится (то есть найдутся такие мальчик и девочка, которые не смогут передать друг другу шпаргалку). Кого пришло на олимпиаду больше (мальчиков или девочек) и на сколько?

(Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко)

Ответ: мальчиков на 8 больше, чем девочек.

Решение. Обозначим количество девочек с двумя знакомыми за x , тогда общее число знакомств равно $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + x \cdot 2 = 17 + 2x$. С другой стороны, если нарисовать граф, описывающий знакомства (где дети являются вершинами, а знакомства — рёбрами), то этот граф окажется деревом — действительно, изначально граф был связан, так как каждая девочка могла передать шпаргалку любому мальчику (а через него — и любой другой девочке), но удаление любого ребра делает его несвязным, что является одним из определений дерева. Поэтому количество рёбер (то есть знакомств) на 1 меньше, чем число вершин: $17 + 2x = 2 + 3 + x + m - 1$, где m — количество мальчиков, пришедших на олимпиаду. Таким образом, $m = x + 13 = (x + 5) + 8$, где $x + 5$ — общее число девочек, пришедших на олимпиаду, то есть мальчиков пришло на 8 больше.

Критерии. Замечание о том, что детей на 1 больше, чем знакомств, стоит 3 балла. Если при подсчетах получилось, что мальчиков на 13 больше, из-за забытых девочек с 3 и 4 знакомыми — ставим 5 баллов. Если выразили число знакомств через количество девочек — 2 балла.

Решение вида «нарисуем 5 девочек и 13 мальчиков, а дальше добавляем +1Д, +1М» — 2 балла.

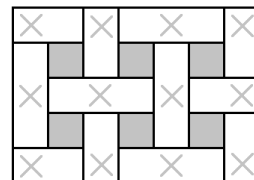
Только верный ответ с примером — 1 балл.

7. Можно ли разрезать квадрат 100×100 по границам клеток на 2024 прямоугольника так, чтобы объединение никакого набора от 2 до 2023 прямоугольников не являлось прямоугольником?

(А. А. Теслер)

Ответ: да.

Решение. Приведём одну из возможных конструкций. Рассмотрим прямоугольник $(2n+1) \times (2m+1)$ с нечётными сторонами, где $nm \geq 2$. Разобьём его на прямоугольники 1×1 , 1×2 , 1×3 , 2×1 , 3×1 как на рисунке (где $n = 2$ и $m = 3$), то есть вырежем квадратики на пересечении строк и столбцов с чётными номерами (показаны серым), а между соседними такими квадратами расположим прямоугольники 1×3 и 3×1 чередующимся образом (прямоугольники из двух клеток получаются при обрезании границами большого прямоугольника). Заметим, что полученные кусочки (кроме квадратов) находятся во взаимно однозначном соответствии с клетками, отмеченными крестиком. Поэтому всего имеется $nm + (n+1)(m+1)$ кусочков.



Более того, при ограничении $nm \geq 2$ нет никакого прямоугольника, целиком состоящего из получившихся маленьких прямоугольников, отличного от них и от всего большого прямоугольника. Действительно, если он содержит квадратик, то он содержит и какого-то его соседа, а тогда он содержит всех

его соседей и ближайшие квадратики. Если же он содержит какой-то прямоугольник, то легко проверить, что он тогда содержит и соседний с ним квадратик.

При $\{n, m\} = \{28, 35\}$ получится 2024 прямоугольника, причём $2n+1$ и $2m+1$ не больше 100. Теперь в получившемся разрезании расширим первые строку и столбец до нужной ширины, чтобы получить требуемое разрезание квадрата 100×100 .

Критерии. Если не доказывается, что приведённый пример удовлетворяет условиям, то ставится не больше 5 баллов.