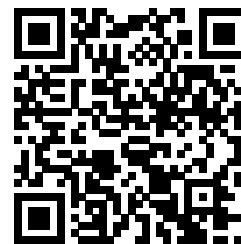




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Найдите наибольшее натуральное число, в записи которого все цифры различны, а сумма всяких трёх соседних цифр — простое число. (С. П. Павлов)

Ответ: 98652470.

Решение. Число 98652470 удовлетворяет требованию условия о простоте.

Докажем, что указанное число — наибольшее возможное. Пусть a_i — i -я цифра числа N , и в нём не менее 9 цифр. По условию, $a_1 + a_2 + a_3$ и $a_2 + a_3 + a_4$ — простые. Так как обе эти суммы больше 2, то они нечётные, а их разность чётная. Значит, числа a_1 и a_4 одной чётности. Рассуждая аналогично, получаем, что числа одной и той же чётности в каждой из трёх групп: $\{a_1, a_4, a_7\}$, $\{a_2, a_5, a_8\}$, $\{a_3, a_6, a_9\}$. Поскольку любая цифра — чётная или нечётная, то чисел одной чётности должно быть не менее $3 + 3 = 6$, что невозможно. Значит, у числа N не более восьми цифр.

Предъявленное в ответе число 98652470 восьмизначное, и первые две его цифры — наибольшие возможные. Третья цифра числа N , очевидно, не равна 7. Итак, искомое число таково: 986... Следующая цифра не равна 7, поэтому её значение не более 5. Пятая цифра не больше 2, и тогда наибольшее возможное значение шестой цифры — это 4. Далее ставим наибольшую оставшуюся цифру 7. На последнее место, соблюдая условие, можно поставить только 0.

Критерии. Только ответ — 2 балла.

Доказано, что число не может быть девятизначным, — 2 балла.

2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку O . При повороте на 90° вокруг точки O этот треугольник перешёл в треугольник DCE . Оказалось, что площадь $ABCD$ в 4 раза меньше площади $ADCE$. Найдите отношение $AO : OC$. (П. Д. Муленко)

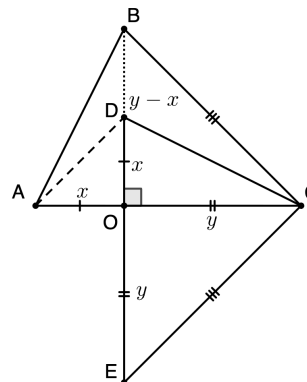
Ответ: 3:5.

Решение. Раз при повороте на 90° точка B перешла в точку C , то отрезок OB перешёл в отрезок OC . Значит, $OB \perp OC$ и $OB = OC$. Аналогично, $AO = OD$ и $OC = OE$.

Обозначим $AO = OD = x$, $OC = OB = OE = y$. Тогда $BD = OB - OD = y - x$, $DE = AC = x + y$ (отрезок OB меньше $OD = OC$, так как угол $\angle ABC$ должен быть острым).

Диагонали обоих данных четырёхугольников перпендикулярны, следовательно, их площади равны

$$S(ABCD) = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{(y - x)(x + y)}{2}, \quad S(ADCE) = \frac{DE \cdot AC}{2} = \frac{(x + y)^2}{2}.$$



Получается, что отношение их площадей равно отношению длин BD и AC :

$$\frac{S(ABCD)}{S(ADCE)} = \frac{BD}{AC} = \frac{y - x}{x + y} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(y - x) = x + y \Rightarrow 3y = 5x.$$

Отсюда искомое отношение $AO : OC = x : y = 3 : 5$.

3. У тетраэдра $ABCD$ все три плоских угла при вершине A равны 60° , а длина каждого ребра — целое число. Обязательно ли все грани тетраэдра равны? (А. А. Теслер)

Ответ: Нет. Например, пусть $AB = AC = BC = 7, AD = 5, BD = CD = 8$. В треугольнике со сторонами 5, 7, 8 угол, лежащий против стороны 7, равен 60° по теореме косинусов.

Критерии. Только ответ (нет) — 0 баллов.

Пример, устроенный разумным образом, имеющий разумное обоснование, но неверный из-за арифметической ошибки или проблем с тригонометрией — до 2 баллов.

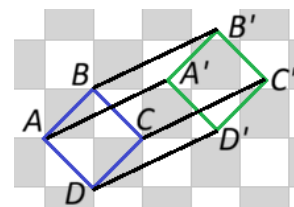
4. На шахматной доске лежит квадрат, площадь которого вдвое больше, чем площадь одной клетки, а стороны параллельны диагоналям клеток. Какую долю от площади квадрата может составлять та его часть, которая окрашена в чёрный цвет? (А. А. Теслер)

Ответ: Половину.

Решение. Заметим, что если вершины квадрата совпадают с узлами шахматной сетки, то площадь чёрной части, очевидно, составляет половину площади квадрата. Если же квадрат расположен произвольным образом (обозначим его $A'B'C'D'$), то его можно получить параллельным переносом из некоторого квадрата $ABCD$ с вершинами в узлах сетки. Докажем, что чёрная площадь в этих квадратах одинакова. Не умаляя общности, пусть точка A' лежит внутри или на границе угла BAC . Если обозначить через $S_b(F)$ площадь чёрного цвета в фигуре F , то

$$S_b(A'B'C'D') + S_b(AA'B'B) + S_b(AA'D'D) = S_b(ABB'C'D'D) = S_b(ABCD) + S_b(DD'C'C) + S_b(BB'C'C),$$

где часть параллелограммов может быть вырожденна. Остаётся заметить, что $S_b(AA'B'B) = S_b(DD'C'C)$ и $S_b(AA'D'D) = S_b(BB'C'C)$, так как эти параллелограммы получены друг из друга параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно, а такие переносы сохраняют раскраску точек.



Примечание. Возможно также рассуждение следующего рода. «Размножим» квадрат $A'B'C'D'$ по обоим измерениям до бесконечности (и шахматную раскраску тоже). Тогда все копии квадрата раскрашены одинаково, поскольку получены параллельными переносами, сохраняющими раскраску. Поэтому доля чёрного цвета во всех копиях одинакова. Но если взять достаточно большую квадратную область, составленную из копий квадрата $ABCD$, то почти вся она (кроме некоторой части вдоль границ, доля которой стремится к нулю при увеличении размера области) делится на доминошки, поэтому доля чёрного цвета в ней не может сильно отличаться от $1/2$. Подобные соображения, использующие стремление к бесконечности, называют асимптотическими. Однако их формализация требует знакомства с основами математического анализа.

Критерии. Недостаточно чётко формализованы асимптотические соображения (или соображение, что доля чёрного цвета сохраняется при параллельном переносе квадрата) — штраф не более 2 баллов.

Если считать, что квадрат может вылезать за пределы исходной доски, то ответ будет «от 0 до $1/2$ », но решение полностью аналогично. За такое понимание условия баллы не снимаются.

5. Инженер пишет программу для робота с металлоискателем, который будет искать клад в плоскости из 100 клеток. Клад лежит в случайной клетке (все клетки равновероятны), также в случайную клетку высаживается робот (он может определить, в какой клетке находится). За одну минуту робот переходит в любую из соседних клеток. Когда робот оказывается в клетке с кладом, поиск завершён. Инженер понимает, что роботу нужно дойти сначала до одного из краёв

полоски, а потом пойти обратно. Но не уверен, к какому краю лучше идти сначала — к тому, который ближе к стартовой клетке (стратегия А), или к дальнему (стратегия Б). Инженер хочет для каждой начальной клетки выбрать лучшую из двух стратегий, исходя из следующего:

- 1) прежде всего нужно минимизировать среднее время поиска клада;
- 2) если оно одинаково — максимизировать вероятность того, что клад найдётся в течение первых 10 минут (то есть что роботу придётся совершить от 0 до 10 шагов);
- 3) если обе стратегии всё ещё одинаково эффективны, то минимизировать максимально возможное время поиска.

Для скольких начальных клеток выгоднее стратегия А, а для скольких — стратегия Б?

(О. А. Пяйве, А. А. Теслер)

Ответ: для 80 клеток (11–90) выгоднее стратегия А, а для 18 клеток (2–10 и 91–99) — стратегия Б.

Решение. 0) Для клеток 1 и 100 обе стратегии приводят к одной и той же последовательности действий, поэтому эти клетки не учитываются ни там, ни там (для них нельзя сказать, что выгоднее А или что выгоднее Б).

1) Сравним среднее время поиска клада. Допустим, робот стоит на некой клетке, слева от него a клеток, а справа b клеток ($a + b = 99$). Пусть робот сначала идёт влево. Тогда для $a + 1$ левых клеток (включая начальную) время поиска будет равняться $0, 1, \dots, a - 1, a$. Если бы после этого робот телепортировался на исходную клетку, то для остальных b клеток время составило бы $a + 1, a + 2, \dots, a + b = 99$, и сумма ста времён составила бы $0 + 1 + \dots + 99$. Но когда робот дойдёт до левого края, он тратит a минут на возвращение на исходную позицию. В результате для каждой из оставшихся b клеток время увеличивается на a минут, и сумма времён поиска равна $(0 + 1 + \dots + 99) + ab$.

Если же робот идёт сначала вправо, а не влево, то числа a и b меняются ролями, но формула для суммы времён (а значит, и для среднего времени) не меняется. Значит, по первому критерию обе стратегии всегда одинаковы.

2) Если робот стоит в клетках 2–10 или 91–99, то при стратегии А некоторые из клеток, посещённых за первые 10 минут, совпадают, поэтому стратегия Б лучше по второму критерию. В остальных случаях стратегии одинаково эффективны по критерию 2, и нужно перейти к критерию 3.

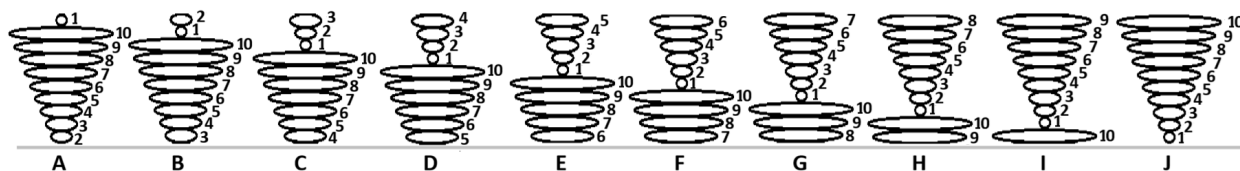
3) Максимально возможное время поиска всегда меньше в стратегии А.

Критерии. Если решение в основном верное, то -1 балл за ошибку на ± 1 (неверно обработаны клетки 10, 91 или 11, 90). Также -1 балл, если нет оговорки про клетки 1 и 100 (например, они учтены как клетки, для которых выгоднее Б). Если оговорка есть, но из неё сделан иной вывод (например, что для этих клеток выгоднее и А, и Б; или что в этих клетках стратегия А вообще невозможна) — баллов не снимать.

Доказано, что по критерию 1 стратегии всегда одинаковы — не менее 3 баллов.

6. Лёша коллекционирует волчки, которые можно запускать так, чтобы они сталкивались друг с другом. Каждый волчок состоит из 10 колец разного радиуса (от 1 до 10), надетых на ось в определённом порядке. Сейчас у Лёши есть 10 волчков, показанных на рисунке, и ещё 10 колец, из которых можно собрать новый волчок. Для любой пары волчков Лёша называет *недружелюбностью* минимальное расстояние, на которое могут сблизиться их оси при движении (например, для пары В и F недружелюбность равна 16, поскольку кольцо радиуса 6 в В находится на том же уровне, что и кольцо радиуса 10 в F). *Агрессивностью* волчка Лёша называет сумму недружелюбностей между ним и каждым из остальных волчков. Лёша хочет сделать новый волчок так, чтобы его агрессивность по отношению к старым волчкам была... (а) как можно меньше; (б) как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться в каждом из случаев?

(А. А. Теслер)

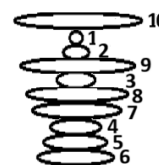


Ответ: (а) минимальная агрессивность равна 155; (б) максимальная — 180.

Решение (а). Рассмотрим волчок, у которого диски увеличиваются сверху вниз, то есть радиус верхнего диска равен 1, следующего 2, ..., нижнего 10. У него сумма недружелюбностей с волчками A, B, ..., J равна $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 11 = 100 + (1 + \dots + 10) = 155$. Уменьшить эту сумму нельзя, потому что для каждого уровня есть волчок, у которого на этом уровне 10, и недружелюбность с ним будет не меньше $10 + i$ (где i — радиус нового волчка на соответствующем уровне).



Решение (б). Недружелюбность 20 у нового волчка может быть только с одним из старых волчков (у которого 10 напротив 10 нового), 19 — максимум с двумя ($9+10$ и $10+9$), 18 — с тремя ($10+8$, $9+9$, $8+10$), 17 — максимум с четырьмя. Заметим, что волчок вида $(10, *, *, 9, *, 8, 7, *, *, *)$ (сверху вниз), где звёздочки заменяют числа от 1 до 6 в произвольном порядке, всё это реализует. (Один из таких волчков показан справа.) Ответ для него $20 + 19 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 17 \cdot 4 = 180$.



Критерии. Минимизация — 3 балла (2 балла — оценка, 1 балл — ответ с примером).

Максимизация — 4 балла (2 балла — оценка, 2 балла — ответ с примером).