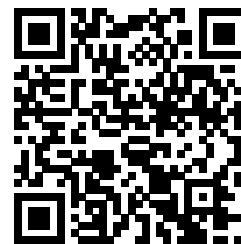




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Укажите все номера годов текущего десятилетия (с 2021 по 2030), которые можно представить суммой одно-, двух-, трёх- и четырёхзначного чисел так, чтобы каждая цифра была использована один раз. (С. П. Павлов)

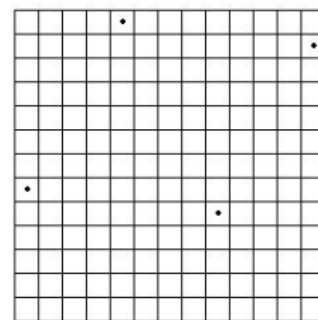
Ответ: только 2025.

Решение. На основании признака делимости на 9 приходим к выводу, что сумма указанных в условии четырёх слагаемых имеет тот же остаток при делении на 9, что и сумма всех цифр, которая равна 45 и имеет остаток 0. Значит, число с указанным в условии свойством должно быть кратно 9. В текущем десятилетии такое только одно — это 2025. И оно действительно представимо в требуемом виде: $2025 = 0 + 42 + 386 + 1597$.

Критерии. 4 балла за пример и 3 за доказательство, что других вариантов нет.

2. Клетчатое поле 13×13 состоит из 169 единичных клеток. Сергей поставил на нём четырёх не бьющих друг друга ферзей. Оказалось, что центры клеток, в которых стоят ферзи, образуют ромб. Обязательно ли этот ромб является квадратом? (С. П. Павлов)

Ответ: Нет (см. рисунок). То, что это ромб, можно доказать через равенство сторон (с помощью теоремы Пифагора: $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$), а можно удостовериться, что диагонали перпендикулярны (их угловые коэффициенты равны $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$) и делятся пополам точкой пересечения.



Критерии. 6 баллов, если приведён верный пример, но не объяснено, почему это ромб.

3. В каждой клетке таблицы 4×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (А. А. Теслер)

Ответ: $1 + 2 + \dots + 10 + 12 + 13 + \dots + 21 = 220$.

Решение. Меньше нельзя из соображений делимости. Действительно, сумма чисел от 1 до 20 равна 210. Но сумма чисел в таблице должна делиться на 4 и на 5, то есть на 20; минимальная подходящая сумма, не меньшая 210, равна 220. Пример таблицы с суммой 220:

21	1	17	9	7
2	20	5	12	16
18	4	9	10	15
3	19	14	13	6

Критерии. 5 баллов за пример и 2 балла за доказательство, что меньше не получится.

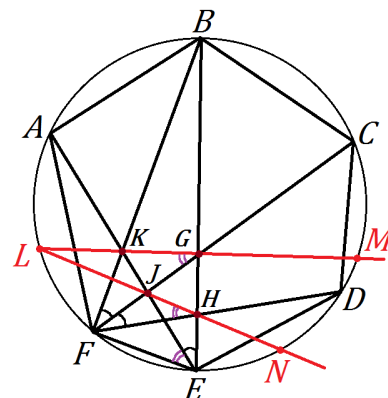
4. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и

K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L , лежащей на ω , а также пересекают эту окружность в точках M и N . Докажите, что $MN = AB$. (О. А. Пяйве)

Решение.

Углы BFC , CFD и AEB равны, поскольку опираются на равные хорды. Значит, четырёхугольники $EFJH$ и $EFKG$ вписанные. Из первого получаем $\angle JEF = \angle JHF$, а из второго — $\angle JEF = \angle KGF$.

Значит, $\angle JHF = \angle KGF$, поэтому $FHGL$ вписанный, отсюда $\angle GLH = \angle GFH$. Значит, дуги MN и CD , на которые опираются эти углы, равны, поэтому $MN = CD = AB$.



5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от 1 до n звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? Запишите ответ в замкнутой форме (без многоточий и знаков суммирования). (О. С. Третьякова)

Ответ: $2 \cdot 3^n - 2$ слов.

Решение. Рассмотрим слова длины k . Первый звук может быть любой из 4; второй — любой из 3, так как не может быть равен первому; третий — тоже любой из 3, так как не может быть равен второму; и так далее.

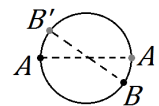
Таким образом, Роза может сказать $4 \cdot 3^{k-1}$ слов длины k , а общее количество слов длины от 1 до n равно сумме таких слагаемых для всех значений k :

$$\sum_{k=1}^n 4 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) = 4 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 2 \cdot (3^n - 1).$$

Критерии. Если найден ответ в незамкнутой форме, то ставится 4 балла.

6. В окружность вписаны три различных остроугольных треугольника (общих вершин у треугольников нет). Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы три выбранные точки образовали треугольник, у которого все углы не превышают 90 градусов. (Л. С. Корешкова)

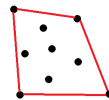
Решение. Пусть A и B — вершины разных треугольников на наибольшем расстоянии друг от друга. Если AB — диаметр, то любая вершина третьего треугольника подходит. Иначе пусть A' и B' — диаметрально противоположные точки к A и B . Вершины третьего треугольника не могут быть на дугах $A'B$ и AB' , включая концы, так как отрезок AB наибольший возможный. Кроме того, все вершины третьего треугольника не могут одновременно лежать на дуге AB , так как он остроугольный. Значит, на дуге $A'B'$ найдётся вершина C третьего треугольника, а тогда ABC остроугольный.



Критерии. За упоминание того, что вписанный треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда он не содержится в полукруге, даётся 1 балл. Если в целом решение полное, но не рассмотрены какие-то случаи, когда противоположные точки являются вершинами разных треугольников, то снимается 1 балл.

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?

Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник.



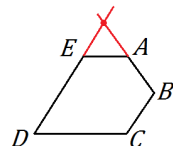
(А. А. Теслер)

Ответ: 5.

Решение. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. За один ход число вершин выпуклой оболочки (обозначим его k) не может увеличиться более чем на 1. (К вершинам выпуклой оболочки добавиться может только новая точка; часть прежних вершин может исчезнуть.)

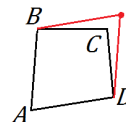
Лемма 2. Если $k = 5$, то за один ход можно сделать его равным 4. (Действительно, если дан пятиугольник $ABCDE$, то стороны AB и CD или AB и DE не параллельны; отметив точку пересечения их продолжений, получим четырёхугольник.)



Лемма 3. Из любого 4-угольника, кроме параллелограмма, можно за один ход сделать треугольник. (Аналогично: отметим точку пересечения двух несмежных непараллельных сторон.)

Лемма 4. Из любого четырёхугольника можно сделать параллелограмм. Действительно, если он ещё не является параллелограммом, то либо это трапеция (и можно продлить меньшую из параллельных сторон так, чтобы она сравнялась с большей), либо у него нет параллельных сторон.

Во втором случае одна из пар углов $A + B$ и $C + D$ меньше 180° , а вторая больше; то же верно для пар $B + C$ и $D + A$. Значит, есть единственная вершина (пусть, например, A), для которой каждая из пар $A + B$ и $A + D$ меньше 180° , и можно построить параллелограмм на сторонах AB и AD .



Лемма 5. Из любого треугольника можно сделать параллелограмм (очевидно).

Теперь опишем стратегии игроков, которые приводят к получению пятиугольника.

Стратегия Вари по недопущению $N \geq 6$. Если после хода Пети стало $k \geq 5$ (а до этого не было), значит, $k = 5$ и можно сделать его равным 4. Если $k < 5$, то можно оставить его прежним (поставив точку внутрь). Таким образом, после хода Вари $k \leq 4$, и Паша за последний ход не сделает его больше 5.

Стратегия Паши, позволяющая сделать $N = 5$. На 3-м ходу сделать треугольник. Варя сделает 4-угольник или оставит треугольник — в обоих случаях превратить его в параллелограмм. После этого достаточно сохранять центральную симметрию выпуклой оболочки вплоть до 2023-го хода (она гарантирует $k \geq 4$ и невозможность превращения в треугольник за один ход). Варя 2024-м ходом сделает k не меньше 4, после чего Паша увеличит k на 1.

Критерии. Если сформулирована лемма 2, лемма 3 или другое похожее утверждение, то даётся 2 балла. Ещё по 2 балла за стратегии каждого игрока.