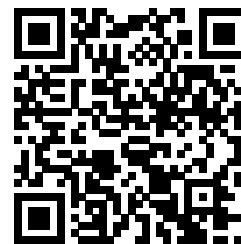




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку O . При повороте на 90° вокруг точки O этот треугольник перешёл в треугольник DCE . Оказалось, что площадь $ABCD$ в 4 раза меньше площади $ADCE$. Найдите отношение $AO : OC$. (П. Д. Муленко)

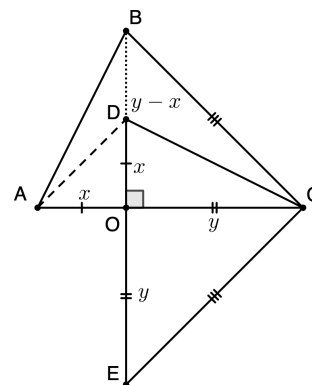
Ответ: 3:5.

Решение. Раз при повороте на 90° точка B перешла в точку C , то отрезок OB перешёл в отрезок OC . Значит, $OB \perp OC$ и $OB = OC$. Аналогично, $AO = OD$ и $OC = OE$.

Обозначим $AO = OD = x$, $OC = OB = OE = y$. Тогда $BD = OB - OD = y - x$, $DE = AC = x + y$ (отрезок OB меньше $OD = OC$, так как угол $\angle ABC$ должен быть острым).

Диагонали обоих данных четырёхугольников перпендикулярны, следовательно, их площади равны

$$S(ABCD) = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)(y-x)}{2}, \quad S(ADCE) = \frac{DE \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}.$$



Получается, что отношение их площадей равно отношению длин BD и AC :

$$\frac{S(ABCD)}{S(ACDE)} = \frac{BD}{AC} = \frac{y-x}{x+y} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(y-x) = x+y \Rightarrow 3y = 5x.$$

Отсюда искомое отношение $AO : OC = x : y = 3 : 5$.

2. У тетраэдра $ABCD$ все три плоских угла при вершине A равны 60° , а длина каждого ребра — целое число. Обязательно ли все грани тетраэдра равны? (А. А. Теслер)

Ответ: Нет. Например, пусть $AB = AC = BC = 7$, $AD = 5$, $BD = CD = 8$. В треугольнике со сторонами 5, 7, 8 угол, лежащий против стороны 7, равен 60° по теореме косинусов.

Критерии. Только ответ (нет) — 0 баллов.

Пример, устроенный разумным образом, имеющий разумное обоснование, но неверный из-за арифметической ошибки или проблем с тригонометрией — до 2 баллов.

3. В школе есть Директор, Учитель и 50 детей. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 0 до 100 конфет включительно. Дед Мороз будет по очереди вызывать всех детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт вопрос Деду Морозу, а потом ещё один вопрос одному из друзей. Все вопросы должны подразумевать только ответы «да» и «нет»; нельзя спрашивать о том, чего собеседник не знает; все отвечают друг другу правду. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Придумайте, как действовать детям, чтобы по числу, полученному от Учителя, Директор смог определить, сколько конфет у Деда Мороза. (И. М. Туманова, А. А. Теслер)

Решение. Например, так. За первые 7 (или меньше) вопросов Деду Морозу дети дихотомией определяют количество конфет, задавая вопросы вида «У вас больше n конфет?». То есть если ребёнок знает, что у Деда Мороза от a до b конфет включительно и $a < b$, то он спрашивает, больше ли у него $\lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$ конфет. Остальные вопросы имеют вид «Дважды два четыре?» и «Дважды два пять?» и задаются так, чтобы суммарное количество ответов «да» совпало с числом конфет. Поначалу это число неизвестно, но если конфет оказалось больше 50, то можно до выяснения точного количества задавать вопросы с ответом «да», а если меньше, то с ответом «нет».

Критерии. 2 балла за стратегию детей по нахождению количества конфет.

4. У Васи есть калькулятор с красной кнопкой. Если на экране написано число x , то при нажатии на кнопку калькулятор с вероятностью 50% заменит его на x^2 , а с вероятностью 50% попытается заменить на $\log_2 x$ (и взорвётся, если $\log_2 x$ не определён). Вася решил испытать удачу: он ввёл в калькулятор число 4 и хочет десять раз подряд нажать красную кнопку. Какова вероятность, что Вася сумеет это сделать и калькулятор не взорвётся? (А. А. Теслер)

Ответ: 297/512.

Решение. Дерево возможных вариантов показано на схеме на следующей странице (ребро вправо-вверх — возведение в квадрат, вправо-вниз — логарифмирование).

Галочкой (V) отмечены ветви, соответствующие успеху, крестиком (X) — неудаче. Если в ветви больше одного варианта, то указано количество успешных и неудачных (считаем, что всего возможны 1024 равновероятных варианта, то есть продолжаем нажимать кнопку даже после взрыва для удобства подсчёта). Если ветвь аналогична той, которая уже встречается в дереве выше, то она не дублируется, а просто переписывается результат.

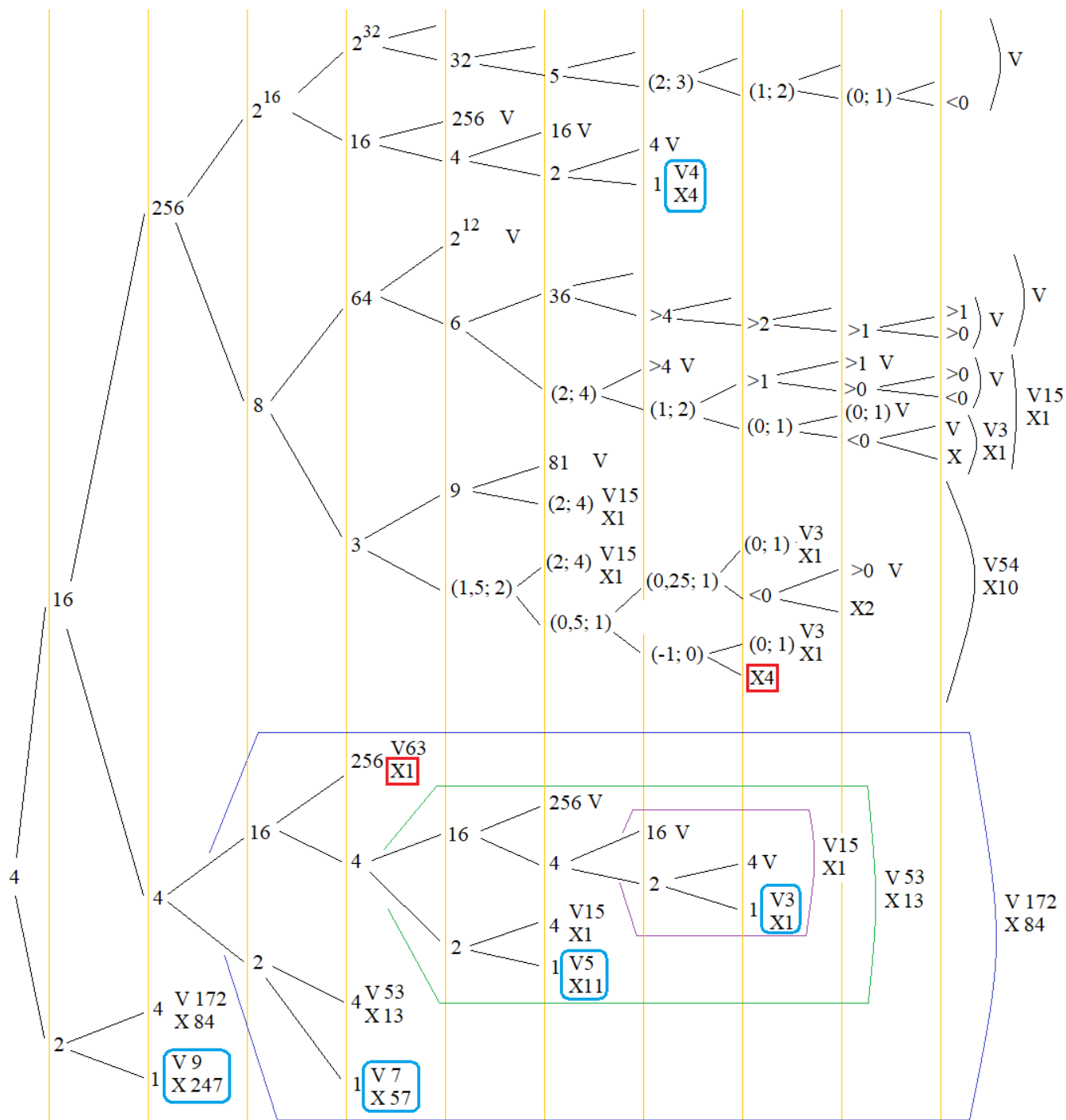
В голубых рамках указано количество успешных и неудачных вариантов после числа 1. Взрыв происходит, если и только если логарифм будет взят хотя бы два раза (возведение 1 в квадрат не меняет её; после первого логарифмирования получаем 0, возведение в квадрат его вновь не меняет; после второго логарифмирования получаем взрыв). Значит, если осталось n ходов, то количество успешных вариантов равно $C_n^0 + C_n^1 = n + 1$, а остальные $2^n - (n + 1)$ неудачные.

Оценки логарифмов очевидны, кроме ветви, начинающейся с числа 3. Там надо заметить, что $2^{1.5} = 2\sqrt{2} < 3 < 2^2$, поэтому $\log_2 3 \in (1,5; 2)$. Далее $2^{0.5} = \sqrt{2} < 1,5 < 2^1$, поэтому $\log_2(\log_2 3) \in (0,5; 1)$. Это важно, чтобы понять, после скольких логарифмирований от числа 256 мы приходим ко взрыву (получается, что после шести). Соответствующая ветвь отмечена красной рамочкой; она повторяется и ниже (где 256 получено после четырёх ходов), где неудачна только одна траектория (вторая красная рамочка). Остальные ветви с началом 256 не приводят ко взрыву за 6 или менее ходов.

Критерии. 2 балла — правильная формула для количества успехов и неудач после получения единицы (или верные расчёты для ВСЕХ ветвей, начинающихся с 1).

2 балла — правильная оценка логарифмов в наиболее сложном случае (то есть обоснованно найдено, что 256 взрывается после шести логарифмирований).

3 балла — оставшаяся работа с деревом (в том числе 1 балл, если указано, что ветвь, начинающаяся с $x > 2^{2^{\dots}}$, точно не приведёт к взрыву за n ходов, где в башне ровно $n - 2$ двоек).



$X: 4+11+84+84+247=430$. $V: 1024-430=594$. $P(V)=594/1024=297/512$.

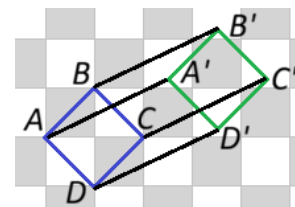
5. На шахматной доске лежит квадрат, площадь которого вдвое больше, чем площадь одной клетки, а стороны параллельны диагоналям клеток. Какую долю от площади квадрата может составлять та его часть, которая окрашена в чёрный цвет? (А. А. Теслер)

Ответ: Половину.

Решение. Заметим, что если вершины квадрата совпадают с узлами шахматной сетки, то площадь чёрной части, очевидно, составляет половину площади квадрата. Если же квадрат расположен произвольным образом (обозначим его $A'B'C'D'$), то его можно получить параллельным переносом из некоторого квадрата $ABCD$ с вершинами в узлах сетки. Докажем, что чёрная площадь в этих квадратах одинакова. Не умаляя общности, пусть точка A' лежит внутри или на границе угла BAC . Если обозначить через $S_b(F)$ площадь чёрного цвета в фигуре F , то

$$S_b(A'B'C'D') + S_b(AA'B'B) + S_b(AA'D'D) = S_b(ABB'C'D'D) = S_b(ABCD) + S_b(DD'C'C) + S_b(BB'C'C),$$

где часть параллелограммов может быть вырожденна. Остаётся заметить, что $S_b(AA'B'B) = S_b(DD'C'C)$ и $S_b(AA'D'D) = S_b(BB'C'C)$, так как эти параллелограммы получены друг из друга параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно, а такие переносы сохраняют раскраску точек.



Примечание. Возможно также рассуждение следующего рода. «Размножим» квадрат $A'B'C'D'$ по обоим измерениям до бесконечности (и шахматную раскраску тоже). Тогда все копии квадрата раскрашены одинаково, поскольку получены параллельными переносами, сохраняющими раскраску. Поэтому доля чёрного цвета во всех копиях одинакова. Но если взять достаточно большую квадратную область, составленную из копий квадрата $ABCD$, то почти вся она (кроме некоторой части вдоль границ, доля которой стремится к нулю при увеличении размера области) делится на доминошки, поэтому доля чёрного цвета в ней не может сильно отличаться от $1/2$. Подобные соображения, использующие стремление к бесконечности, называют асимптотическими. Однако их формализация требует знакомства с основами математического анализа.

Критерии. Недостаточно чётко формализованы асимптотические соображения (или соображение, что доля чёрного цвета сохраняется при параллельном переносе квадрата) — штраф не более 2 баллов.

Если считать, что квадрат может вылезать за пределы исходной доски, то ответ будет «от 0 до $1/2$ », но решение полностью аналогично. За такое понимание условия баллы не снимаются.

6. Многочлен $P(x)$ на интервале $x \in (0; 1)$ дважды принимает значение 0 и дважды — значение 1. Докажите, что существует такая точка $a \in (0; 1)$, что $|P''(a)| > 2$. (А. А. Теслер)

Решение. Значения 0, 0, 1, 1 могут приниматься в различном порядке. Рассмотрим все 6 вариантов.

а) 0, 0, 1, 1. Тогда между первыми двумя нулями есть точка с производной 0 (экстремум), между 0 и 1 — с производной больше 1 (поскольку приращение составило 1 на отрезке длиной менее 1), между 1 и 1 — снова с производной 0. Расстояние от второй точки до первой или до третьей меньше $1/2$, а P' успевает вырасти более чем на 1, значит, где-то $P'' > 2$.

б) 0, 1, 1, 0. Между первыми двумя точками есть точка с $P' > 1$, между третьей и четвёртой — точка с $P' < -1$. Где-то между этими точками $P'' < -2$.

в) 0, 1, 0, 1. Работает то же рассуждение, что и в пункте (б), причём четвёртая точка не нужна.

г, д, е) Для порядков, начинающихся с единицы, всё аналогично (поскольку многочлен P можно заменить многочленом $1 - P$).

Критерии. Если рассмотрены не все порядки расположения точек, то не больше 5 баллов. За наиболее существенный случай 0, 0, 1, 1 (или 1, 1, 0, 0) даётся 4 балла.