

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (С. П. Павлов)

Ответ: $2^{10} = 1024$.

Решение. Десять цифр разбиваются на пять разностей. Чтобы их произведение равнялось степени двойки, каждая из них должна равняться степени двойки, то есть 1, 2, 4 или 8. Заметим, что поскольку чётных и нечётных цифр по 5, то хотя бы в одну из разностей попадут цифры разной чётности, и она должна равняться 1. Наибольшая степень двойки при указанном вычитании — это $2^3 = 8$, и она получается только в таких случаях: $9 - 1$ и $8 - 0$. Каждая из оставшихся двух разностей не больше, чем 2^2 . Поэтому при умножении двойка получится не более, чем в $3 + 3 + 2 + 2 + 0 = 10$ степени.

Пример: $(9 - 1) \cdot (8 - 0) \cdot (7 - 3) \cdot (6 - 2) \cdot (5 - 4) = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 2^{10}$.

Примечание. Пример единственен (с точностью до перестановки множителей).

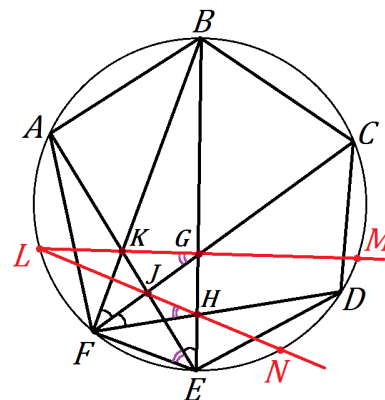
Критерии. За пример 3 балла, за оценку 4.

2. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L , лежащей на ω , а также пересекают эту окружность в точках M и N . Докажите, что $MN = AB$. (О. А. Пяйве)

Решение.

Углы BFC , CFD и AEB равны, поскольку опираются на равные хорды. Значит, четырёхугольники $EFJH$ и $EFKG$ вписанные. Из первого получаем $\angle JEF = \angle JHF$, а из второго — $\angle JEF = \angle KGF$.

Значит, $\angle JHF = \angle KGF$, поэтому $FHGL$ вписанный, отсюда $\angle GLH = \angle GFH$. Значит, дуги MN и CD , на которые опираются эти углы, равны, поэтому $MN = CD = AB$.



3. Один и тот же прямоугольник является сечением двух разных кубов. Каково максимально возможное отношение объёмов этих кубов? (А. А. Теслер)

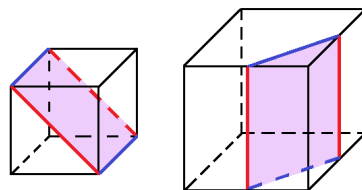
Ответ: $2\sqrt{2}$.

Решение. Сначала докажем, что любое прямоугольное сечение α перпендикулярно одной из граней куба. Обозначим через β и γ грани куба, пересекающие α по соседним сторонам, тогда обязательно $\beta \perp \gamma$. Если $\alpha \cap \beta \perp \gamma$, то $\alpha \perp \gamma$. Иначе проведём прямую ℓ через точку $\alpha \cap \beta \cap \gamma$ в плоскости β перпендикулярно $\beta \cap \gamma$. Тогда пересекающиеся прямые ℓ и $\alpha \cap \beta$ ортогональны

$\alpha \cap \gamma$, поэтому $\alpha \cap \gamma$ — прямая, ортогональная всей плоскости β (проходящей через ℓ и $\alpha \cap \beta$), откуда $\alpha \perp \beta$.

Теперь посмотрим в проекции на грань куба, перпендикулярную сечению. Одна из сторон прямоугольника равна ребру куба (a), а другая от 0 до $a\sqrt{2}$. Если у прямоугольника отношение сторон больше $\sqrt{2}$, то ребро куба равно длинной стороне (то есть единственно, что не соответствует условию), а если нет, то два варианта ребра (равно либо длинной, либо короткой стороне сечения). Максимальное отношение этих вариантов равно $\sqrt{2}$, откуда отношение объёмов — $2\sqrt{2}$.

Такие сечения действительно существуют. В меньшем кубе возьмём сечение, проходящее через пару противоположных рёбер, а в большем — сечение, проходящее через середины двух рёбер с общей вершиной и параллельное третьему ребру с этой же вершиной.



Критерии. Существование примера оценивается в 1 балл, оценка в 5 баллов. Если в оценке используется, что любое прямоугольное сечение параллельно ребру куба, то доказательство этого факта стоит 3 балла.

4. В каждой клетке таблицы 4×2025 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (А. А. Теслер)

Ответ: $4 \cdot 2025 \cdot 4051 = 32\,813\,100$.

Решение. Числа от 1 до $4 \cdot 2025$ взять нельзя, потому что их сумма равна $4 \cdot 2025 \cdot \frac{4 \cdot 2025 + 1}{2}$, что не делится на $4 \cdot 2025$. Ближайшая бóльшая сумма, делящаяся на $4 \cdot 2025$, — это $4 \cdot 2025 \cdot 4051$, и её можно получить из чисел от 1 до $4 \cdot 2025 + 1$, кроме числа $2 \cdot 2025 + 1 = 4051$.

Для построения примера рассмотрим таблицу, показанную ниже. В ней среднее арифметическое чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 0. Если к каждому числу прибавить 4051, то числа попадут в нужный диапазон, а среднее в каждом столбце и в каждой строке станет равно 4051, что обеспечивает равенство сумм в строках и равенство сумм в столбцах.

+2	−5	+3	+7	−7	+11	−11	...	$+(4k+3)$	$-(4k+3)$	...	+4047	−4047
−1	+4	−3	−8	+8	−12	+12		$-(4k+4)$	$+(4k+4)$		−4048	+4048
+1	+5	−6	−9	+9	−13	+13		$-(4k+5)$	$+(4k+5)$		−4049	+4049
−2	−4	+6	+10	−10	+14	−14		$+(4k+6)$	$-(4k+6)$		+4050	−4050

Критерии. 5 баллов за пример и 2 балла за доказательство, что меньше не получится.

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и рисует такие фигуры до тех пор, пока их суммарная площадь не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Например, по карточке с цифрой 5 автомат строит квадрат 5×5 без одной клетки, повторяет его 6 раз (получается 144 клетки, что равно 12^2) и возвращает число 12. Всего автомат работал 10 раз. Может ли количество цифр в числе на последней получившейся карточке быть в 1024 раза больше, чем на изначальной?

(П. Д. Муленко, А. А. Теслер)

Решение.

Если при каком-то срабатывании автомата из числа a получается $a^2 - 1$ и это срабатывание не последнее, то при следующем срабатывании получится число не больше

$$\sqrt{(a^2 - 1)((a^2 - 1)^2 - 1)} = a^3 - a < a^3.$$

Если же из a получается меньшее число, то оно будет не больше $\frac{a^2 - 1}{2} < \frac{a^2}{2}$.

Пусть изначально было k -значное число $10^{k-1} \leq a_0 < 10^k$ (где $k \geq 1$), а через 10 срабатываний автомата получилось $1024k$ -значное число. Тогда на каждом шаге количество цифр обязано удваиваться. Если на каком-то шаге из a_s получилось $a_{s+1} = a_s^2 - 1$ и $s < 9$, то

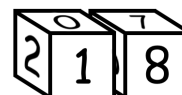
$$a_{s+2} < a_s^3 < 10^{3 \cdot 2^s k} \leq 10^{4 \cdot 2^s k - 1},$$

чего не может быть. Тогда $a_{s+1} < \frac{a_s^2}{2}$ для всех $0 \leq s \leq 9$, то есть $a_3 < \frac{a_0^8}{2^7} < 10^{8k-1}$.

Критерии. За оценки на результат одного или двух срабатываний автомата (кроме тривиальной $\leq a^2 - 1$) даётся от 1 до 3 баллов.

6. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей.

Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?



Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет.

(М. В. Карлукова)

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Это 7 различных цифр, но две из них — 6 и 9 — можно заменить одной, поскольку другая получается из неё переворотом.

Итак, нужно распределить цифры от 3 до 8 по двум кубам (на каждом по три цифры). Выбрать 3 цифры на первый кубик можно $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому есть всего $20/2 = 10$ различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.

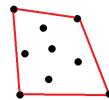
Рассмотрим один из кубиков. На нём где-то написана цифра 1, и есть только один способ поставить кубик так, чтобы она была спереди в правильном положении. Остальные 5 граней можно заполнить $5! = 120$ способами без учёта вращения цифр. На каждой грани есть 4 способа повернуть цифру, кроме двух цифр 0 и одной цифры 8, для которых таких способов по 2.

Ответ: $10 \cdot 120^2 \cdot 4^7 \cdot 2^3 = 18\,874\,368\,000$ способов.

Критерии. Если ответ найден как арифметическое выражение, но не посчитан до конца, то не больше 6 баллов. Если найден ответ без учёта вращений цифр на гранях (9000), то ставится 3 балла. За ошибку в 2 раза (20 способов распределения цифр по кубикам вместо 10) снимается балл.

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?

Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник.



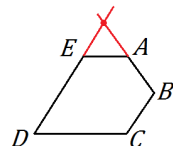
(А. А. Теслер)

Ответ: 5.

Решение. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. За один ход число вершин выпуклой оболочки (обозначим его k) не может увеличиться более чем на 1. (К вершинам выпуклой оболочки добавиться может только новая точка; часть прежних вершин может исчезнуть.)

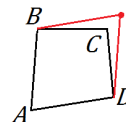
Лемма 2. Если $k = 5$, то за один ход можно сделать его равным 4. (Действительно, если дан пятиугольник $ABCDE$, то стороны AB и CD или AB и DE не параллельны; отметив точку пересечения их продолжений, получим четырёхугольник.)



Лемма 3. Из любого 4-угольника, кроме параллелограмма, можно за один ход сделать треугольник. (Аналогично: отметим точку пересечения двух несмежных непараллельных сторон.)

Лемма 4. Из любого четырёхугольника можно сделать параллелограмм. Действительно, если он ещё не является параллелограммом, то либо это трапеция (и можно продлить меньшую из параллельных сторон так, чтобы она сравнялась с большей), либо у него нет параллельных сторон.

Во втором случае одна из пар углов $A + B$ и $C + D$ меньше 180° , а вторая больше; то же верно для пар $B + C$ и $D + A$. Значит, есть единственная вершина (пусть, например, A), для которой каждая из пар $A + B$ и $A + D$ меньше 180° , и можно построить параллелограмм на сторонах AB и AD .



Лемма 5. Из любого треугольника можно сделать параллелограмм (очевидно).

Теперь опишем стратегии игроков, которые приводят к получению пятиугольника.

Стратегия Вари по недопущению $N \geq 6$. Если после хода Пети стало $k \geq 5$ (а до этого не было), значит, $k = 5$ и можно сделать его равным 4. Если $k < 5$, то можно оставить его прежним (поставив точку внутрь). Таким образом, после хода Вари $k \leq 4$, и Паша за последний ход не сделает его больше 5.

Стратегия Паши, позволяющая сделать $N = 5$. На 3-м ходу сделать треугольник. Варя сделает 4-угольник или оставит треугольник — в обоих случаях превратить его в параллелограмм. После этого достаточно сохранять центральную симметрию выпуклой оболочки вплоть до 2023-го хода (она гарантирует $k \geq 4$ и невозможность превращения в треугольник за один ход). Варя 2024-м ходом сделает k не меньше 4, после чего Паша увеличит k на 1.

Критерии. Если сформулирована лемма 2, лемма 3 или другое похожее утверждение, то даётся 2 балла. Ещё по 2 балла за стратегии каждого игрока.