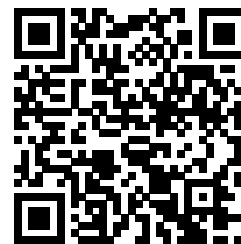




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



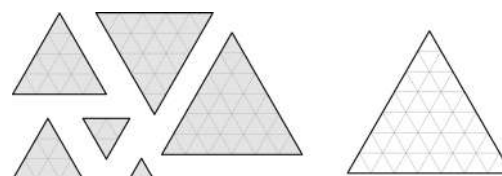
Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Конструктор состоит из равносторонних треугольников со сторонами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (по 50 штук каждого размера). Ирина хочет собрать равносторонний треугольник со стороной 7, используя некоторые из имеющихся деталей, укладывая их без наложений и дыр. Помогите ей справиться ровно 9 детальками. (Л. С. Корешкова)

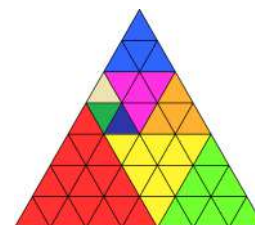


Ответ: Например, так, как показано справа.

Критерии. Верный пример — 7 баллов.

Использовано 10 деталей вместо 9 — 1 балл.

Есть пересечения или выступы за край — 0 баллов. Приведены только количества деталей — 0 баллов.



2. В каждую пустую клетку квадрата 3×3 справа надо поставить по одной цифре так, чтобы во всех строках и столбцах сумма была одинакова, а всякая цифра присутствовала в квадрате хотя бы дважды (или отсутствовала). Найдите все решения и докажите, что других нет. (П. Д. Муленко)

2		
		3
4	2	

Ответ: Это можно сделать только одним способом:

2	4	3
3	3	3
4	2	3

Решение. Обозначим левое число в средней строке за x . Тогда, из левого столбца, сумма должна быть равна $x + 6$, откуда:

- в средней строке центральное число должно быть равно $x + 6 - x - 3 = 3$,
- в нижней строке правое число должно быть равно $x + 6 - 2 - 4 = x$,
- в правом столбце верхнее число должно быть равно $x + 6 - x - 3 = 3$,
- наконец, центральное число в верхней строке должно быть равно $x + 6 - 2 - 3 = x + 1$.

2	$x+1$	3
x	3	3
4	2	x

Поскольку каждая цифра должна быть представлена хотя бы дважды, какая-то из неизвестных цифр должна быть равна 4. Если $x = 4$, то тогда центральная цифра верхней строки равна 5, но эта цифра больше нигде не повторяется. Значит, $x + 1 = 4$, и другие две незаполненные клетки содержат цифру 3.

Критерии. Только пример без какого-либо обоснования — 2 балла.

Доказано, что в центре и в правом верхнем углу стоят тройки — +1 балл за каждую.

Среди возможных заполнений есть хотя бы одно неправильное — 0 баллов.

3. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце

каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц монеты приносят «потомство»: если монета была золотая, то из неё вырастает 5 веточек с серебряной монетой на каждой, а если серебряная, то две веточки с золотой монетой на каждой. Старые монеты при этом исчезают.

(а) Через некоторое время Буратино собрал с дерева весь урожай — 2000 монет. Какую монету посадил Буратино и сколько месяцев он ждал?

(б) Кот Базилио утверждает, что он тоже посадил монету и через некоторое время обнаружил, что на его дереве 4000 монет. Может ли он говорить правду? (П. Д. Муленко)

Ответ: (а) Буратино посадил серебряную монету и ждал 7 месяцев; (б) нет.

Решение (а). Из условия следует, что если в текущем месяце все монеты на дереве были серебряные, то в следующем будут золотые, и наоборот. Таким образом, монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5.

$2000 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$, то есть из самой первой монеты проросло 2 веточки (то есть Буратино посадил серебряную монету), и ждать потребовалось ровно 7 месяцев.

Решение (б). Как было показано в пункте (а), монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5. Если Базилио посадил серебряную монету, то через 7 месяцев на его дереве будет $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2000$ монет (как и получилось у Буратино), а через 8 месяцев их станет в 5 раз больше, то есть уже 10000 монет. А если Базилио посадил золотую монету, то через 6 месяцев на его дереве будет $5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 1000$ монет, а ещё через месяц их будет в 5 раз больше, то есть 5000. И в том, и в другом случае количество монет в какой-то месяц меньше 4000, а в следующий уже больше 4000, то есть ровно 4000 монет Базилио получить никак не мог.

Другое решение (б). Как было показано в пункте (а), монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5. Из этого, в том числе, следует, что в любой момент количество монет на дереве равно произведению нескольких двоек и пятерок, причём количество двоек и пятёрок не может отличаться больше чем на 1. Но 4000 равно произведению 3 пятёрок и 5 двоек, поэтому такое количество монет не могло получиться.

Критерии. Пункт (а) оценивается в 3 балла — по 1 баллу за ответ, пример и доказательство единственности.

Пункт (б) оценивается из 4 баллов:

Приведён только ответ «да» или «нет» — 0 баллов;

В 1-м решении каждый разобранный случай даёт по 2 балла;

Во 2-м решении отсутствие объяснения, почему степени 2 и 5 могут отличаться на 0 или ± 1 — -1 балл.

4. Миша записал верный арифметический пример на сложение. Потом заменил в нём каждую цифру буквой (разные цифры — разными буквами, а одинаковые — одинаковыми), но при этом в одном месте ошибся, заменив цифру не той буквой. В результате у него получился пример $ONE + ONE = TWO$. Какое максимальное значение могло принимать число справа от знака «равно» в его примере, прежде чем он заменил цифры буквами? Докажите, что оно действительно максимальное. (А. А. Теслер)

Ответ: 986 ($643 + 343 = 986$ или $ONE + ENE = TWO$)

Решение. Так как мы ищем наибольшее значение результата сложения, будем подставлять в TWO наибольшие возможные цифры.

Если $TWO = 99*$, то $T = W$ и ошибка найдена, то есть в левой части выражения ошибок нет. Тогда O обязана равняться 4 ($5** + 5** > 1000$, $3** + 3** < 900$), то есть $TWO = 994$ и $ONE = 994 : 2 = 497$, но тогда $T = W = N = 9$, то есть ошибок больше одной. Следовательно, $TWO = 98*$.

Если $TWO = 989$ или 987 (то есть нечётное число), то ошибка должна быть в буквах E (если

слагаемые оканчиваются одной и той же цифрой, то сумма будет чётна), то есть обе O в левой части должны равняться 4, что приводит ко второй ошибке, так как O в правой части — нечётная цифра.

Если $TWO = 988$, то одна ошибка уже есть ($W = O = 8$), но тогда $ONE = 988/2 = 494$, то есть $O = E$, и ошибок снова больше одной.

Если $TWO = 986$, то находим подходящий пример: $643 + 343 = 986$, который корректно зашифровывается как $ONE + ENE = TWO$.

Критерии. Только верный пример — 3 балла.

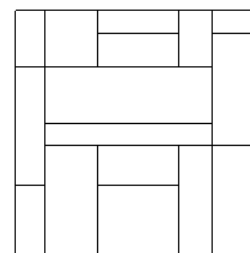
Получен ответ $492 + 492 = 984$ — 2 балла.

Доказана невозможность случая $TW = 99$ — +1 балл.

В оценке рассматриваются только чётные значения числа TWO — -1 балл.

В случае неверного понимания условия (например, что Миша ошибся в арифметике, а не в шифровании) — 0 баллов.

5. Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет.

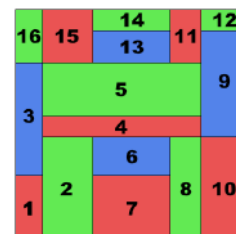


(П. Д. Муленко)

Ответ: 6.

Решение. Пронумеруем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками») от 1 до 16, как показано на рисунке.

Первые 3 блока все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока.



После этого цвета всех остальных блоков определяются однозначно.

Так, четвёртый блок граничит со вторым и третьим, поэтому он может быть только того же цвета, что и первый блок. Пятый блок граничит с третьим и четвёртым, поэтому он может быть только того же цвета, что и второй блок. И так далее.

Таким образом, покраска первых трёх блоков определяет раскраску всего квадрата. Значит, всего есть 6 возможных раскрасок.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведено только несколько каких-то раскрасок, среди которых нет 6 различных правильных, и больше ничего — 0 баллов.

Указано, что раскраски трёх блоков достаточно для раскраски всего квадрата — +3 балла.

Приведена правильная раскраска (без доказательства единственности) и формула перестановок — 3 балла.

6. В эксперименте принимают участие несколько (один или больше) реальных людей и несколько ИИ (искусственных интеллектов). Каждый участник отправляет всем остальным по «мему» (смешной картинке), но, так как ИИ воспринимает юмор не совсем так, как люди, человеческие мемы смешны всем, а мемы ИИ — только таким же ИИ.

По результатам эксперимента оказалось, что количество «неловких» обменов мемами, когда засмеялся только один из двух участников обмена, равно 93. А сколько могло быть «комфортных» ситуаций, когда оба участника смеются над мемами друг друга? Найдите все варианты

и докажете, что других нет.

(П. Д. Муленко)

Ответ: 468 или 4278.

Решение. Обозначим число людей, участвующих в эксперименте, за x , а число ИИ — за y . Обмен будет неловким, только когда в нём принимают участие один человек и один ИИ, поэтому количество неловких обменов равно количеству пар вида «человек—ИИ», то есть произведению числа людей и числа ИИ: $xy = 93$. Так как обе переменные положительны, такое возможно в двух ситуациях: $93 = 3 \cdot 31 = 1 \cdot 93$ (какой именно из множителей равен x , а какой — y , не принципиально).

В комфортной же ситуации, поскольку смеются оба участника обмена, участвуют или два человека, или два ИИ. Каждый из x человек посылает по одному мему остальным $x - 1$ людям, откуда количество комфортных обменов между людьми равно $\frac{x(x-1)}{2}$ (пополам, так как каждый обмен мы учитываем дважды). Аналогично, количество комфортных обменов между ИИ равно $\frac{y(y-1)}{2}$.

Итого, общее количество комфортных ситуаций равно $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$ при x и y , равным 3 и 31 или 1 и 93:

$$\frac{3 \cdot (3 - 1)}{2} + \frac{31 \cdot (31 - 1)}{2} = 3 + 31 \cdot 15 = 468 \quad \text{или} \quad \frac{1 \cdot (1 - 1)}{2} + \frac{93 \cdot (93 - 1)}{2} = 93 \cdot 46 = 4278.$$

Критерии. Найден только один ответ — не более 3 баллов.

Приведены только ответы без объяснения — +1 балл за каждый.

Написана (или объяснена) формула для подсчёта комфортных ситуаций — +2 балла.

* Получен ответ 468, а вариант 4278 исключён, так как «несколько» это «больше одного» — не более 5 баллов.

* Выписаны делители числа 93 — 1 балл.