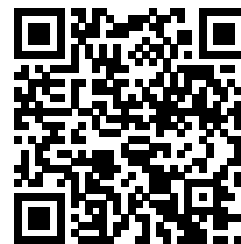




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

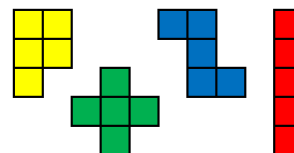
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (С. П. Павлов)

Ответ: да; например, $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов. Пример — 7 баллов.

2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).

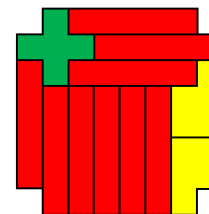


а) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8 , если из него удалены четыре угловые клетки.

б) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026 , если из него удалены четыре угловые клетки. (Л. С. Корешкова)

Решение. а) Для доказательства достаточно любого примера (один из них показан справа).

б) Площадь поля 2026×2026 после удаления четырёх угловых клеток равна $2026 \cdot 2026 - 4$, последняя цифра этого числа равна $6 - 4 = 2$. Но каждая фигурка состоит из 5 клеток, то есть площадь покрытой фигуры должна делиться на 5. Следовательно, данный квадрат без угловых клеток заполнить невозможно.



Критерии. Правильно решён только пункт (а) — 3 балла. Если все фигуры отзеркалены (после отражения рисунка получается верный пример) — минус 1 балл. Если только часть фигур отзеркалена (то есть при отражении всей картинки проблема не исчезает) — 1 балл за пункт (а). «Можно, поскольку число клеток делится на 5» — 0 баллов (поскольку делимости на 5 недостаточно).

Правильно решён только пункт (б) — 3 балла. Правильно решены оба пункта — 7 баллов.

3. Если в начало натурального числа дописать цифру 2, то получится квадрат этого числа. Чему может быть равно это число? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

(П. Д. Муленко)

Ответ: только число 5.

Решение. Если число однозначное, то его квадрат должен быть двузначным числом, начинающимся на 2. Есть только одно такое число 5: $5^2 = 25$.

Если число двузначное, то его квадрат должен быть трёхзначным числом, начинающимся на 2. Есть только три таких трёхзначных квадрата: $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, но ни один из них не подходит.

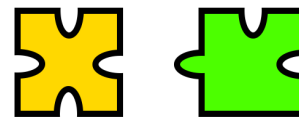
Наконец, если число хотя бы трёхзначное, то его квадрат минимум на 2 цифры длиннее ($100^2 = 10\,000$). Поэтому единственное число, удовлетворяющее условию — это 5.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Полная проверка однозначных и двузначных чисел — 3 балла.

Доказательство того, что исходное число не может содержать более двух цифр — 4 балла.

4. Маленькой Маше на день рождения подарили прямоугольный пазл, собирающийся из нескольких равного размера квадратных кусочков, в каждом из которых на сторонах есть впадинки или выпуклости (при этом контур пазла ровный).



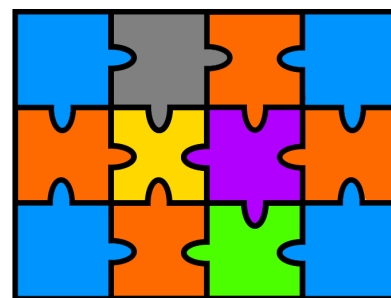
Известно, что в этом наборе есть такие два кусочка (см. рис.). Какое наименьшее количество деталей может быть в подаренном пазле? Не забудьте привести пример, а также объяснить, почему меньше деталей быть не может. (П. Д. Муленко)

Ответ: 12.

Решение. Жёлтый кусочек должен быть полностью внутри пазла, так как граница должна быть ровной (то есть без впадинок и выпуклостей). Значит, размер пазла не менее чем 3×3 .

Однако, если он ровно 3×3 , то в нём не может быть зелёного кусочка, так как его надо расположить в середине стороны из-за наличия ровной грани, но напротив этой ровной грани тогда должна быть выпуклость, чтобы он мог сцепиться с центральным жёлтым кусочком.

Значит, жёлтый и зелёный кусочки не могут быть в одной строке или столбце, то есть размер пазла должен быть хотя бы 3×4 (см. рисунок).



Критерии. Только правильный ответ («12 кусочков» или «это прямоугольник 3×4 ») — 1 балл.

Ответ с примером — 3 балла.

Ответ с доказательством и примером — 7 баллов.

Нет примера — минус 2 балла.

5. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (П. Д. Муленко)

Ответ: 6 см/мин.

Решение. Поскольку суммарный подъём равен суммарному спуску, весь маршрут муравья можно разбить на 3 части: общий подъём, общий спуск и общий горизонтальный участок.

Обозначим общее время, которое муравей поднимался, за t . Тогда длина подъёма (как и спуска) равна $3t$, а общее время спуска равно $3t/v$, где v — искомая скорость спуска.

Таким образом, время горизонтального движения равно $7 - t - 3t/v$, и мы можем выразить общий пройденный путь:

$$28 = 3t + 4 \left(7 - t - 3 \cdot \frac{t}{v} \right) + 3t,$$

$$28 = 6t + 28 - 4t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 0 = 2t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 6 \cdot \frac{t}{v} = t, \quad v = 6.$$

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Вывод уравнения — 2 балла. Доказательство на конкретном примере — не более 3 баллов.

6. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до трёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (О. С. Третьякова)

Ответ: 52 слова.

Решение. Роза может произнести 4 слова длиной в один звук.

Если в слове 2 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 = 12$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому.

Наконец, если в слове 3 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, а третий — второму.

Итого она может сказать $4 + 12 + 36 = 52$ различных слова.

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Арифметические ошибки — минус 1–2 балла. Также снимаются баллы, если нет достаточно полных объяснений (например, не объяснено, откуда берутся числа 12 и 36).

7. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (Степень двойки — это произведение нескольких двоек, например, пятая степень двойки равна $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.) (С. П. Павлов)

Ответ: $2^{10} = 1024$.

Решение. Десять цифр разбиваются на пять разностей. Чтобы их произведение равнялось степени двойки, каждая из них должна равняться степени двойки, то есть 1, 2, 4 или 8. Заметим, что поскольку чётных и нечётных цифр по 5, то хотя бы в одну из разностей попадут цифры разной чётности, и она должна равняться 1. Наибольшая степень двойки при указанном вычитании — это $2^3 = 8$, и она получается только в таких случаях: $9 - 1$ и $8 - 0$. Каждая из оставшихся двух разностей не больше, чем 2^2 . Поэтому при умножении двойка получится не более, чем в $3 + 3 + 2 + 2 + 0 = 10$ степени.

Пример: $(9 - 1) \cdot (8 - 0) \cdot (7 - 3) \cdot (6 - 2) \cdot (5 - 4) = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 2^{10}$.

Примечание. Пример единственен (с точностью до перестановки множителей).

Критерии. За пример 3 балла, за оценку (то есть доказательство, что больше, чем 2^{10} , получить нельзя) — 4 балла.