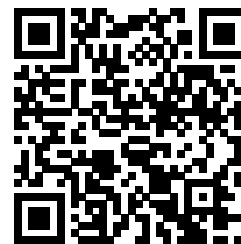




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Маша учится умножать числа в столбик, но делает это неправильно: она перемножает цифры в одном разряде, добавляет к ним перенос из предыдущего разряда, пишет младшую цифру результата на соответствующее место в ответе, а старшую цифру результата переносит дальше. Например, $37 \otimes 49 = 183$ (см. справа). Может ли Маша умножить какое-нибудь число само на себя и получить 2026? (Е. Ю. Воронецкий)

$$\begin{array}{r} 1 6 \\ 3 7 \\ \otimes 4 9 \\ \hline 1 8 3 \end{array}$$

Ответ: да, а именно $1336 \otimes 1336$.

Примечание. Можно доказать, что это единственный пример.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.

Приведён верный пример числа (1336) без проверки и/или пояснения — 7 баллов.

2. В каждую пустую клетку квадрата 3×3 справа надо поставить по одной цифре так, чтобы во всех строках и столбцах сумма была одинакова и при этом ровно одна цифра присутствовала в квадрате ровно 1 раз (все остальные цифры должны присутствовать хотя бы дважды или отсутствовать вовсе). Найдите все решения и докажете, что других нет. (П. Д. Муленко)

6	9	
		7
8		

Ответ: Есть 2 способа:

6	9	7
8	7	7
8	6	8

6	9	8
9	7	7
8	7	8

Решение. Обозначим число в правом верхнем углу за x . Тогда, из верхней строки, сумма должна быть равна $x + 15$, откуда:

- в правом столбце нижнее число должно быть равно $x + 15 - x - 7 = 8$,
- в левом столбце среднее число должно быть равно $x + 15 - 6 - 8 = x + 1$,
- в нижней строке среднее число должно быть равно $x + 15 - 8 - 8 = x - 1$,
- наконец, центральное число в средней строке должно быть равно $x + 15 - (x + 1) - 7 = 7$.

6	9	x
$x+1$	7	7
8	$x-1$	8

Цифры 6 и 9 представлены по одному разу на текущий момент, а, согласно условию, только одна цифра во всей таблице должна присутствовать один раз. Значит, одной из трёх неизвестных цифр является или 6, или 9. Перебирая 6 возможных случаев, находим два подходящих: когда $x - 1 = 6$, или когда $x + 1 = 9$ (в иных случаях среди неизвестных цифр будут ещё уникальные).

Критерии. Только примеры без какого-либо обоснования — +1 балл за каждый.

Доказано, что в центре стоит цифра 7 — +1 балл.

Доказано, что в правом нижнем углу стоит цифра 8 — +1 балл.

Среди возможных заполнений есть хотя бы одно неправильное — 0 баллов.

3. Пусть N — натуральное число, состоящее из 2026 цифр. Из них 46 цифр равны нулю, а количества остальных цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) находятся в соотношении $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9$ (именно в таком порядке). Докажите, что число N не может оказаться точным квадратом.

(Л. С. Корешкова)

Решение. Обозначим количество единиц в числе за x . Тогда двоек — $2x$, троек — $3x$, ..., девяток — $9x$, и всего цифр в числе $x + 2x + 3x + \dots + 9x + 46 = 2026$, откуда $45x = 1980$, и $x = 44$. Тогда сумма цифр равна $44 \cdot (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 9 \cdot 9) + 46 \cdot 0 = 44 \cdot 285$, то есть делится на 3, но не на 9. Значит, и N кратно трём, но не 9, а такое число не может быть точным квадратом.

Критерии. Найдено количество единиц — 1 балл.

Рассуждение в целом верное, но допущена арифметическая ошибка, не повлиявшая на делимость — 5 баллов.

4. Миша записал верный арифметический пример на сложение. Потом заменил в нём каждую цифру буквой (разные цифры — разными буквами, а одинаковые — одинаковыми), но при этом в одном месте ошибся, заменив цифру не той буквой. В результате у него получился пример $TWO + TWO = FOUR$. Какое максимальное значение могло принимать четырёхзначное число в его примере, прежде чем он заменил цифры буквами? Докажите, что оно действительно максимальное.

(А. А. Теслер)

Ответ: 1972 ($986 + 986 = 1972$ или $TWO + TWO = FTUR$)

Решение. Так как складываются 2 трёхзначных числа и получается четырёхзначное, то $F = 1$. Для получения наибольшего результата T должно быть равно 9, а также цифра сотен результата (на месте которой стоит O) может быть равна 9 (то есть правильный пример выглядит так: $TWO + TWO = FTUR$).

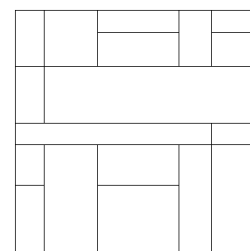
Тогда больше ошибок в Мишином примере нет, то есть слагаемые равны, а сумма чётна, причём цифры в каждом числе разные. Значит, слагаемые не превосходят 987. Но, если они равны 987, то сумма равна 1974, и появляется вторая ошибка ($O = U = 7$). Если же $TWO = 986$, то всё сходится: $986 + 986 = 1972$.

Примечание. В решении сразу предполагается, что ошибка в букве сотен результата. Если же это не так, то или цифра сотен результата не 9 (и тогда результат будет меньше 1972), или хотя бы одна из цифр сотен слагаемых не 9 (и тогда результат заведомо меньше $899 + 999 = 1898$, что тоже меньше 1972).

Критерии. Только верный пример без оценки — 2 балла.

Решение верное, но оценка неполная (например, при оценке через правую часть пропускаются нечётные числа) — не более 5 баллов.

5. Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет.



(П. Д. Муленко)

Ответ: 54.

Решение. Подпишем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками»), как показано на рисунке.

Сперва рассмотрим центральную полосу из блоков 0A, 0B и двух неподписанных. Тройка блоков из двух неподписанных и 0A все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый неподписанный блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй неподписанный блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок 0A можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока. Блок 0B тоже касается обоих неподписанных, поэтому его цвет будет таким же, как и у блока 0A.

2B	1B	4B	5B	7B
		3B		6B
0B				
				0A
6A		3A		
7A	5A	4A	1A	2A

Теперь рассмотрим верхнюю и нижнюю полосы из блоков 1A–7A и 1B–7B. Эти две группы идентичны друг другу по тому, как блоки граничат друг с другом, поэтому будем рассматривать их вместе.

Если блок с номером 1 имеет отличный цвет от соответствующего блока 0 (что продемонстрировано в нижней полоске на примере блоков 0A и 1A), то цвета всех остальных блоков восстанавливаются однозначно. Так, блок 2 граничит и с блоком 0, и с блоком 1, поэтому он должен быть третьего цвета; блок 3 граничит и с блоком 1, и с одним из неподписанных блоков, поэтому он должен быть того же цвета, что и блок 0; и так далее.

А если же блок с номером 1 окрашен в тот же цвет, что и соответствующий блок 0 (что продемонстрировано в верхней полоске на примере блоков 0B и 1B), то тогда блок 2 может быть раскрашен в любой из двух других цветов, а все остальные блоки в полоске закрашиваются однозначно.

Таким образом, есть 6 возможных раскрасок для центральной полосы из 4 блоков (двух неподписанных, 0A и 0B), и по 3 возможных раскраски для верхней и нижней полос (из блоков 1B–7B и 1A–7A, соответственно). Всего $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ возможных раскраски.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведена только одна какая-то раскраска и больше ничего — 0 баллов.

Вне зависимости от логики перебора, каждый потерянный случай — -2 балла.

6. В эксперименте принимают участие несколько (один или больше) реальных людей и несколько ИИ (искусственных интеллектов). Каждый участник отправляет всем остальным по «мему» (смешной картинке), но, так как ИИ воспринимает юмор не совсем так, как люди, человеческие мемы смешны всем, а мемы ИИ — только таким же ИИ.

По результатам эксперимента оказалось, что количество «неловких» обменов мемами, когда засмеялся только один из двух участников обмена, равно 520. А каково наименьшее возможное количество «комфортных» ситуаций, когда оба участника засмеялись над мемами друг друга?

(П. Д. Муленко)

Ответ: 515.

Решение. Обозначим число людей, участвующих в эксперименте, за x , а число ИИ — за y . Обмен будет неловким, только когда в нём принимают участие один человек и один ИИ, поэтому количество неловких обменов равно количеству пар вида «человек–ИИ», то есть произведению числа людей и числа ИИ: $xy = 520$.

В комфортной же ситуации, поскольку смеются оба участника обмена, участвуют или два человека, или два ИИ. Каждый из x человек посылает по одному мему остальным $x - 1$ людям, откуда количество комфортных обменов между людьми равно $\frac{x(x-1)}{2}$ (пополам, так как каждый обмен мы учитываем дважды). Аналогично, количество комфортных обменов между ИИ равно $\frac{y(y-1)}{2}$.

Итого, общее количество комфортных ситуаций равно $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$. Переберём возможные пары x и y , дающие в произведении 520: поскольку $520 = 13 \cdot 5 \cdot 2^3$, то его делитель, не кратный 13, равен 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20 или 40. Наименьшее значение получается при $x = 20$ и $y = 26$ (или

наоборот):

$$\frac{20 \cdot (20 - 1)}{2} + \frac{26 \cdot (26 - 1)}{2} = 10 \cdot 19 + 13 \cdot 25 = 515.$$

Примечание. Найти минимальное количество комфортных ситуаций можно и без перебора — например, через формулы сокращённого умножения:

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x^2 + y^2 - x - y}{2} = \frac{(x+y)^2 - (x+y) - 2xy}{2} = \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} - xy.$$

Это выражение будет минимальным при наименьшем возможном значении $x+y$ (то есть при наименьшем общем числе участников), которое, при фиксированном произведении, будет достигаться при наименьшей возможной разности между x и y , то есть при 20 и 26.

Критерии. Приведён только ответ без объяснения — 2 балла.

Написана (или объяснена) формула для подсчёта комфортных ситуаций — +2 балла.

При верном ходе решения найдено не наименьшее возможное значение — не более 4 баллов.