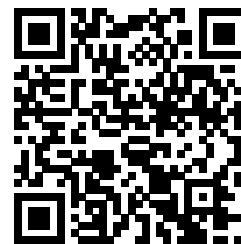




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап



Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

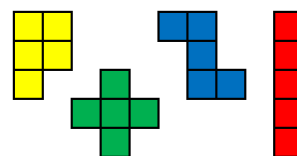
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (С. П. Павлов)

Ответ: да; например, $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов. Пример — 7 баллов.

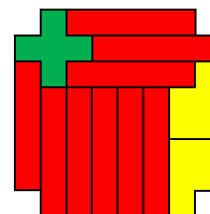
2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).



- а) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8 , если из него удалены четыре угловые клетки.
б) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026 , если из него удалены четыре угловые клетки. (Л. С. Корешкова)

Решение. а) Для доказательства достаточно любого примера (один из них показан справа).

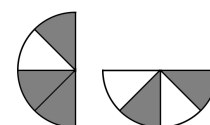
- б) Площадь поля 2026×2026 после удаления четырёх угловых клеток равна $2026 \cdot 2026 - 4$, последняя цифра этого числа равна $6 - 4 = 2$. Но каждая фигурка состоит из 5 клеток, то есть площадь покрытой фигуры должна делиться на 5. Следовательно, данный квадрат без угловых клеток заполнить невозможно.



Критерии. Правильно решён только пункт (а) — 3 балла. Если все фигуры отзеркалены (после отражения рисунка получается верный пример) — минус 1 балл. Если только часть фигур отзеркалена (то есть при отражении всей картинки проблема не исчезает) — 1 балл за пункт (а). «Можно, поскольку число клеток делится на 5» — 0 баллов (поскольку делимости на 5 недостаточно).

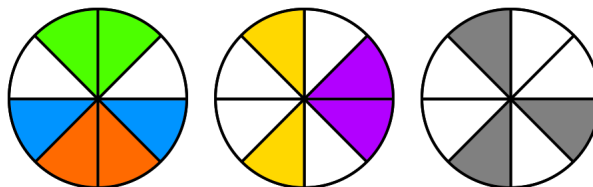
Правильно решён только пункт (б) — 3 балла. Правильно решены оба пункта — 7 баллов.

3. Прозрачный круглый диск разделён на 8 равных секторов. Некоторые из секторов закрашены. Если сложить диск пополам по вертикальной оси, видно 3 закрашенных сектора. Если сложить диск пополам по горизонтальной оси, видно 2 закрашенных сектора. Сколько всего закрашено секторов? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (П. Д. Муленко)



Решение. Так как в результате складывания пополам по вертикальной оси видно 3 закрашенных сектора, то и в самом диске должны быть закрашены не менее трёх секторов.

При этом, если мы развернём обратно каждый из двух полукругов, мы увидим три и две пары секторов соответственно, в каждой из которых должно быть закрашено не менее одного сектора (см. левые два рисунка).

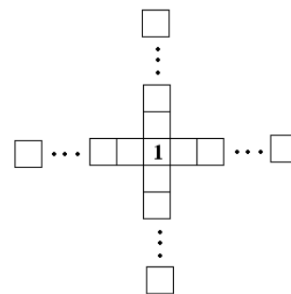


Сопоставляя эти две диаграммы, можно заметить, что верхний из правых секторов не может быть закрашен, а остальные три выделенных сектора центральной диаграммы обязаны быть закрашены.

Таким образом, в диске закрашены ровно 3 сектора, изображённые на правом рисунке.

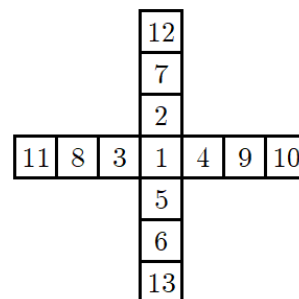
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Ответ с примером — 2 балла. Доказано, что количество закрашенных секторов не может быть меньше 3 и больше 4 — по 1 баллу за оценку с каждой стороны.

4. На игровом поле в форме крестика из клеток (см. рисунок) два игрока по очереди делают ходы. В начале игры занята только центральная клетка, в которой написано число 1. Ход заключается в том, что игрок вписывает в четыре клетки, смежные с уже занятыми, следующие по порядку натуральные числа — первый игрок пишет числа 2, 3, 4, 5, потом второй пишет числа 6, 7, 8, 9, и так далее. Числа вписываются по одному в каждое направление креста так, чтобы любые два числа, стоящие в соседних клетках, были взаимно простыми (то есть не имели общих делителей, больших 1). Если кто-то из игроков не может сделать ход, то он проигрывает. Какой из игроков может обеспечить себе победу при правильной игре? (С. П. Павлов)



Ответ: первый.

Решение. В первые 3 хода игроки напишут числа 2–5, 6–9, и 10–13 (например, так, как на рисунке). После этого второму игроку необходимо написать числа 14, 15, 16, 17. Заметим, что число 15 не может стоять на поле рядом ни с 10, ни с 12, то есть это число второй игрок может расположить только рядом с числами 11 или 13. Но числа 14 и 16 тоже можно написать только рядом с нечётными (то есть тоже рядом с 11 и 13). Таким образом, второй игрок не сможет сделать свой второй ход и проиграет.



Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указание, что чётные числа не могут быть в соседних клетках — 2 балла.

5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до четырёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (О. С. Третьякова)

Ответ: 160 слов.

Решение. Роза может произнести 4 слова длиной в один звук.

Если в слове 2 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 = 12$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому.

Если в слове 3 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, а третий — второму.

Наконец, если в слове 4 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, третий — второму, а четвёртый — третьему.

Итого, она может сказать $4 + 12 + 36 + 108 = 160$ различных слов.

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Арифметические ошибки — минус 1–3 балла. Также снимаются баллы, если нет достаточно полных объяснений (например, не объяснено, откуда берутся

числа 12, 36 и 108).

6. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (Л. С. Корешкова)

Ответ: у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

Решение. Так как $289 = 17^2$, Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):

- белорусских монет больше $289 \cdot 0,06 = 17,34 > 17$, то есть их не менее 2 коробок;
- испанских монет больше $289 \cdot 0,12 = 34,68 > 34 = 17 \cdot 2$, то есть их не менее 3 коробок;
- эквадорских монет больше $289 \cdot 0,24 = 69,36 > 68 = 17 \cdot 4$, то есть их не менее 5 коробок;
- русских монет больше $289 \cdot 0,36 = 104,04 > 102 = 17 \cdot 6$, то есть их не менее 7 коробок.

Таким образом, у Ирины уже заняты $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коробок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

7. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N , причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (Л. С. Корешкова)

Ответ: нет, не получится.

Решение. Раз количество городов N чётно, но не делится на 4, его можно представить как $N = 4k + 2$. Тогда общее количество дорог в стране Оз равно

$$\frac{N \cdot (N - 1)}{2} = \frac{(4k + 2) \cdot (4k + 1)}{2} = (2k + 1) \cdot (4k + 1).$$

Оба числа $2k + 1$ и $4k + 1$ являются нечётными, то есть и общее количество дорог нечётно. Но тогда количество дорог из жёлтого кирпича не может быть равно количеству дорог из зелёного изумруда, поэтому какая-то пара номеров останется соединена дорогой того же цвета, что и до перенумерования.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что суммарное количество дорог нечётно — 5 баллов.