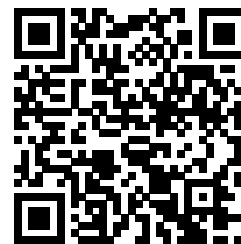




Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап



Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Маша учится умножать числа в столбик, но делает это неправильно: она перемножает цифры в одном разряде, добавляет к ним перенос из предыдущего разряда, пишет младшую цифру результата на соответствующее место в ответе, а старшую цифру результата переносит дальше. Например, $37 \otimes 49 = 183$ (см. справа). Может ли Маша умножить какое-нибудь число само на себя и получить 2026? (Е. Ю. Воронецкий)

$$\begin{array}{r} 1 6 \\ \curvearrowleft \curvearrowright \\ \otimes 3 7 \\ 4 9 \\ \hline 1 8 3 \end{array}$$

Ответ: да, а именно $1336 \otimes 1336$.

Примечание. Можно доказать, что это единственный пример.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.

Приведён верный пример числа (1336) без проверки и/или пояснения — 7 баллов.

2. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 2 или 5 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Через некоторое количество месяцев Буратино собрал с дерева весь «урожай» в размере 2026 монет. Какое наибольшее количество месяцев могло пройти? (П. Д. Муленко)

Ответ: 10.

Решение. Так как каждый месяц из монеты прорастает или 2, или 5 новых монет, то общее число монет на дереве за месяц как минимум удваивается (а как максимум, увеличивается в 5 раз). Это означает, что через 10 месяцев количество монет на дереве не меньше чем $2^{10} = 1024$, а через 11 месяцев — не менее чем $1024 \cdot 2 = 2048$, что уже больше, чем 2026. Значит, могло пройти не более 10 месяцев.

При этом необходимо показать, что такое вообще могло произойти (то есть что Буратино действительно мог собрать ровно 2026 монет). Предположим, что в первые 9 месяцев из каждой монеты проросло 2 веточки, тогда их будет ровно $1024/2 = 512$. И если в последний месяц из 334 монет прорастёт по 5 новых монет, а из остальных $512 - 334 = 178$ монет прорастёт только по 2 новые монеты, то общее число монет как раз будет $334 \cdot 5 + 178 \cdot 2 = 2026$.

Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл.

Доказана только оценка (без примера) — 3 балла.

Дан только пример на 10 месяцев — 4 балла.

3. 2130 год будет «годом-перевертышем» — если поставить знак «минус» между второй и третьей цифрами, то разность двух двузначных чисел, прочитанных слева направо, будет равна разности двузначных чисел, прочитанных справа налево: $21 - 30 = 03 - 12 = -9$. Сколько всего таких лет в третьем тысячелетии?

Примечание. Как видно из примера, числа могут начинаться с нуля, а разность не обязана быть положительной. (Л. С. Корешкова)

Ответ: 69 лет.

Решение. Расписав равенство по разрядам, приходим к выводу, что сумма первых двух должна быть равна сумме последних двух:

$$10a + b - (10c + d) = 10d + c - (10b + a) \Rightarrow 11(a + b) = 11(c + d) \Rightarrow a + b = c + d.$$

А так как нас интересуют годы в третьем тысячелетии, то $a = 2$ (см. замечание в конце решения). Таким образом, достаточно перебрать возможные значения остальных цифр (например, по столетиям):

- $b = 0$: $c + d = 2 \rightarrow 2002, 2011, 2020$ — 3 года;
- $b = 1$: $c + d = 3 \rightarrow 2103, 2112, 2121, 2130$ — 4 года;
- $b = 2$: $c + d = 4 \rightarrow 2204, 2213, 2222, 2231, 2240$ — 5 лет;
- $b = 3$: $c + d = 5 \rightarrow 2305, 2314, \dots, 2350$ — 6 лет;
- $b = 4$: $c + d = 6 \rightarrow 2406, 2415, \dots, 2460$ — 7 лет;
- $b = 5$: $c + d = 7 \rightarrow 2507, 2516, \dots, 2670$ — 8 лет;
- $b = 6$: $c + d = 8 \rightarrow 2608, 2617, \dots, 2680$ — 9 лет;
- $b = 7$: $c + d = 9 \rightarrow 2709, 2718, \dots, 2790$ — 10 лет;
- $b = 8$: $c + d = 10 \rightarrow 2819, 2828, \dots, 2891$ — 9 лет;
- $b = 9$: $c + d = 11 \rightarrow 2929, 2938, \dots, 2992$ — 8 лет.

Всего получаем $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 = 69$ лет-перевёртышей.

Примечание. Строго говоря, третьим тысячелетием является диапазон лет с 2001 по 3000, но, так как ни 2000-й год, ни 3000-й не являются перевёртышами, мы можем смело рассматривать диапазон с 2000 по 2999 годы.

Критерии. Доказано, что сумма двух первых цифр равна сумме двух последних — не менее 3 баллов. Наоборот, если перечислены (и верно подсчитаны) все годы-перевёртыши, но полностью отсутствует доказательство, что других нет — 2 балла.

Неправильно подсчитаны годы-перевёртыши в каких-то столетиях — не больше 5 баллов.

Рассматривается диапазон 2000–2999 вместо 2001–3000 — баллов не снимать.

4. Сколькими способами можно заменить буквы a, b, c, d, e в выражении справа цифрами от 0 до 4 (использовав по одному разу каждую) так, чтобы оно равнялось натуральному числу?

(П. Д. Муленко)

$$a + \frac{b}{c + \frac{d}{e}}$$

Ответ: 44.

Решение. Чтобы всё выражение было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое (дробь) было целым числом.

Если $b = 0$, то вся дробь равна 0, и любая расстановка остальных цифр будет давать целый результат. Необходимо расставить 4 цифры на 4 места, что можно сделать $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

Если $d = 0$, то дробь вырождается в b/c , которая может быть целой в 4 случаях ($2/1$, $3/1$, $4/1$ и $4/2$), после чего оставшиеся 2 цифры можно поставить на места букв a и e в произвольном порядке — $4 \cdot 2 = 8$ допустимых расстановок.

Если $c = 0$, то дробь преобразуется в be/d . Она будет целым числом в двух случаях:

- если $d = 1$, и тогда вместо b и e можно расставить любые две цифры и 3 оставшихся $3 \cdot 2 = 6$ способами, и на место a отправляется последняя оставшаяся цифра);
- если $d = 2$, и тогда одна из букв b и e должна равняться 4, и остальные 2 цифры можно расставить в произвольном порядке — $2 \cdot 2 = 4$ расстановки.

Наконец, если ни одно из чисел в дроби не равно 0 (то есть $a = 0$), то дробь преобразуется в $\frac{be}{ce+d}$. Если тройка находится в знаменателе, то знаменатель будет иметь простой делитель больше 4, то есть не будет сократимой до целого ($1 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 2 + 3 = 5$, $2 \cdot 3 + 1 = 1 \cdot 3 + 4 = 1 \cdot 4 + 3 = 7$,

$3 \cdot 4 + 1 = 13$, $2 \cdot 3 + 4 = 10 = 5 \cdot 2$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $4 \cdot 3 + 2 = 14 = 7 \cdot 2$). Значит, $b = 3$, а в знаменателе используются цифры 1, 2 и 4. Если $d = 1$, то знаменатель равен 9, и дробь не сократится нацело; иначе знаменатель равен $1 \cdot 2 + 4 = 1 \cdot 4 + 2 = 6$, и дробь будет сократима, если тройка в числителе умножается не на 1: $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2 + 4} = 1$ и $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4 + 2} = 2$.

Итого есть $24 + 8 + 6 + 4 + 2 = 44$ допустимые расстановки цифр.

Критерии. Только ответ без объяснения — 2 балла.

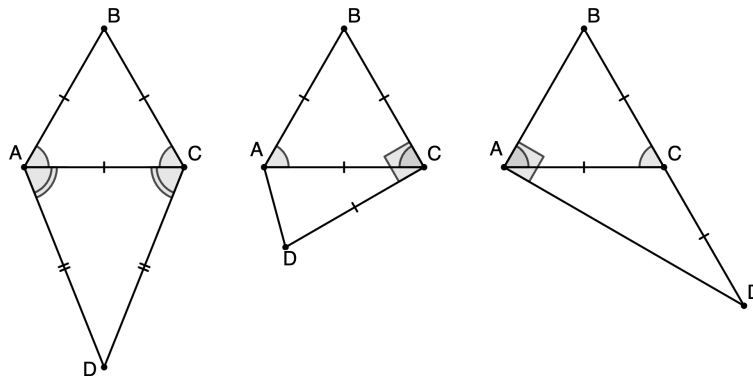
Каждое потерянное число при $a = 0$ — -1 балл.

Каждый потерянный случай равенства нулю одной из цифр b, c, d — -2 балла.

5. Дан выпуклый четырёхугольник с двумя острыми и одним тупым углами. Одна из диагоналей разбивает его на равносторонний и равнобедренный треугольники. Какими могут быть углы четырёхугольника? Найдите все варианты и докажете, что других нет. (П. Д. Муленко)

Ответ: Существует один такой четырёхугольник с углами 60° , 75° , 90° и 135° .

Решение. В выпуклом четырёхугольнике 4 угла. Если из них три являются тупым и острыми, то последний угол прямой. Более того, раз половинкой 4-угольника является равносторонний треугольник, то один из острых углов равен 60° . Нарисуем равносторонний треугольник ABC и посмотрим, как к нему можно пририсовать равнобедренный треугольник.



Если сторона равностороннего треугольника AB равна основанию равнобедренного (то есть в равнобедренном треугольнике ACD $AD = DC$, см. рис. слева), то углы BAD и BCD будут равны, что не сходится с условием ($\angle ABC = 60^\circ$, значит, остальные три угла четырёхугольника должны быть острым, тупым и прямым).

Значит, сторона AC равностороннего является боковой стороной равнобедренного ($AC = CD$). Угол D не может быть прямым (так как этот угол является углом при основании в равнобедренном треугольнике), значит, прямым углом является BAD или BCD .

Если $\angle BAD = 90^\circ$, тогда $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, и $\angle ACD = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, но тогда $ABCD$ является треугольником, а не четырёхугольником (так как $\angle BCD = 180^\circ$ — см. рис. справа). Значит, $\angle BCD = 90^\circ$, тогда $\angle ACD = 30^\circ$, и $\angle CAD = \angle ADC = 75^\circ$.

Итого, углы четырёхугольника равны 60° , 90° , 75° и 135° (см. рис. в центре).

Критерии. Найден прямой угол — +1 балл.

Найден угол в 60° — +1 балл.

Не рассмотрен вырожденный случай с углом в 180° (правый рисунок) — -1 балл.

Не рассмотрен случай, когда четырёхугольник является дельтоидом (левый рисунок) — -2 балла.

6. В школе учатся 50 детей. Некоторые из них — рыцари (отвечают только правду), остальные — лжецы (всегда врут). Ещё в школе есть Директор и Учитель. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 50 до 100 конфет включительно. Директор планирует написать 50 бумажек, на каждой из которых написаны два вопроса (один красной ручкой, другой синей). Каждый вопрос должен подразумевать ответ «да» или «нет». Потом Директор случайным образом раздаёт каждому ребёнку по одной бумажке, после чего уходит.

Далее начинается ёлка, на которой Дед Мороз по очереди вызывает детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт сначала красный вопрос Деду Морозу, а потом синий — случайному ребёнку. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Помогите Директору придумать такие вопросы, чтобы по числу, полученному от Учителя, определить, сколько конфет у Деда Мороза. Кстати, Директор не помнит, сколько из детей — рыцари, а Дед Мороз честно отвечает на каждый заданный ему вопрос.

(И. М. Туманова, А. А. Теслер)

Ответ: Например, Директор нумерует детей от 1 до 50, каждому вписывает синий вопрос «Ты рыцарь?» и красный вопрос «У тебя больше, чем $49 + k$ конфет?», где k — номер ребёнка. То есть один ребёнок задаёт Деду Морозу вопрос «У тебя больше 50 конфет?», второй «У тебя больше 51 конфет?», ..., последний «У тебя больше 99 конфет?».

Решение. Покажем, что количество ответов «да» в ситуации, описанной в ответе, равно количеству конфет. Действительно, на вопрос «Ты рыцарь?» любой ученик ответит «да» независимо от того, является он рыцарем или лжецом. Разберём вопросы учеников Деду Морозу. Если у Деда Мороза a конфет, то он будет отвечать «да» тем ученикам, чей номер k удовлетворяет неравенству $a > 49 + k$, то есть при всех $k \leq a - 50$. Поскольку $50 \leq a \leq 100$, то количество таких учеников равно $a - 50$ (от нуля при $a = 50$ до 50 при $a = 100$). В сумме с 50 ответами учеников на вопросы друг друга получается ровно a ответов «да».

Например, если конфет 70, то 50 ответов «да» дадут ученики и ещё 20 даст Дед Мороз, отвечая ученикам с номерами от 1 до 20.

Критерии. Приведён подходящий алгоритм, но не объяснено, как и почему Директор может установить число конфет (по сути, только ответ без обоснования) — не более 5 баллов.

Если предложенный алгоритм использует фразы вида «Скажи "да", если выполняется такое-то условие, и "нет" в противном случае», которые не являются вопросами — −2 балла, если их нельзя просто переформулировать в вопрос без потери смысла.

Если предложенный алгоритм позволяет определить любое количество конфет, кроме какого-то одного (например, невозможно отличить 50 и 100 конфет) — не более 3 баллов.